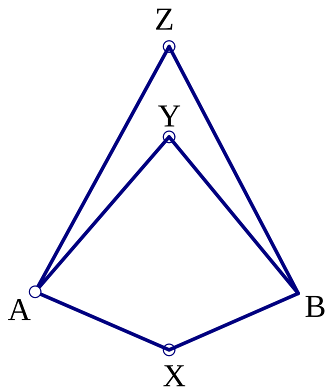
Εὐκλείδεια Γεωμετρία

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2010

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ ΓΝΩΣΕΩΝ
ΤΡΙΓΩΝΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

1. Στὸ σχῆμα 1 ὑποθέτομε ὅτι καθένα ἀπὸ τὰ σημεῖα X, Y, Z ἰσαπέχει ἀπὸ τὰ σημεῖα



Σχῆμα 1: Ἄσκηση 1

A, B. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὰ X, Y, Z εἶναι συνευθειακά.

2. Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἂν δύο γωνίες ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσες, τὸ τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές.
Ὑπόδειξη. Ἔστω ὅτι στὸ τρίγωνο ABC εἶναι $\angle B = \angle C$. Παρατηρῆστε ὅτι $\triangle ABC = \triangle ACB$. Προσέξτε τὴ διάταξη ποὺ εἶναι γραμμένες οἱ κορυφές.

3. Δίδονται δύο διαφορετικὰ σημεῖα A, B καὶ μία εὐθεία η, τέμνουσα τὴν ευθεία AB, σ' ἕνα σημεῖο, ἔστω C. Συμβολίζομε μὲ A', B' τὰ συμμετρικὰ τῶν A, B ὡς πρὸς τὴν η. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ εὐθεία $A'B'$ διέρχεται ἀπὸ τὸ C.
Ὑπόδειξη. Ἡ ἄσκηση αὐτὴ εἶναι ἁπλῆ, ἀλλὰ πρέπει νὰ λυθεῖ μὲ τὸν σωστὸ τρόπο. Πρὸς Θεοῦ, ὄχι νὰ φέρετε τὶς εὐθεῖες $A'C$ καὶ $B'C$ καὶ ν' ἀποδείξετε ὅτι $\angle A'CB' = \pi$! Ὁ πιὸ ἐνδεδειγμένος τρόπος εἶναι νὰ θεωρήσετε τὸ συμμετρικὸ σχῆμα τῆς εὐθείας ACB ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὸν η.

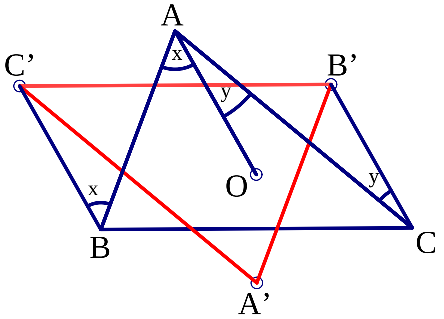
4. Ἔστω ἰσοσκελὲς τρίγωνο ABC μὲ $AB = AC$. Ἀποδεῖξτε τὰ ἑξῆς:

   (α′) Τὰ ὕψη ἀπὸ τὶς κορυφὲς B καὶ C εἶναι ἴσα.

   (β′) Οἱ διάμεσοι ἀπὸ τὶς κορυφὲς B καὶ C εἶναι ἴσες.

(γ′) Οἱ διχοτόμοι ἀπὸ τὶς κορυφὲς B καὶ C εἶναι ἴσες.

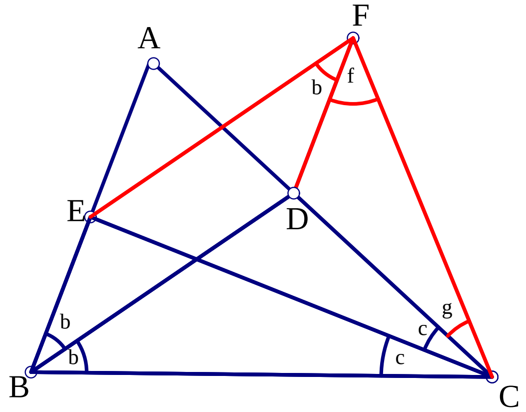
5. Στὸ σχῆμα 2, τὸ τρίγωνο ABC εἶναι τυχαῖο καὶ O εἶναι τὸ περίκεντρό του. Τὰ σημεῖα A', B', C' εἶναι τὰ συμμετρικὰ τοῦ O ὡς πρὸς τὶς πλευρὲς BC, CA καὶ AB, ἀντιστοίχως. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα BC καὶ $B'C'$ εἶναι ἴσα καὶ



Σχῆμα 2: Ἄσκηση 5

παράλληλα. Κατ’ ἀναλογίαν, τὰ εὐθύγραμμα τμήματα . . . καὶ . . . εἶναι ἴσα καὶ παράλληλα, ὁπότε $\triangle A'B'C' = \triangle ABC$.
Ὑπόδειξη. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὰ τετράπλευρα $OAC'B$ καὶ $OAB'C$ εἶναι ρόμβοι. Στὸ σχῆμα 2, δύο ζευγάρια γωνιῶν ἔχουν σημειωθεῖ, ἀντιστοίχως, μὲ τὰ ἴδια γράμματα (x καὶ y), ποὺ σημαίνει ὅτι, γιὰ κάθε ζεῦγος, οἱ γωνίες εἶναι ἴσες. Αὐτὸ χρειάζεται, βέβαια, ἀπόδειξη!

6. Ἡ ‘ἀντίστροφη’ τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως. Ἔστω τρίγωνο ABC. Ἀπὸ τὶς κορυφὲς B καὶ C φέρνομε αντιστοίχως τὰ ὕψη BB', CC', τὶς διαμέσους BM, CN καὶ τὶς διχοτόμους BD, CE. Ἀποδεῖξτε τὰ ἑξῆς:



Σχῆμα 3: Ἄσκηση 6γ′

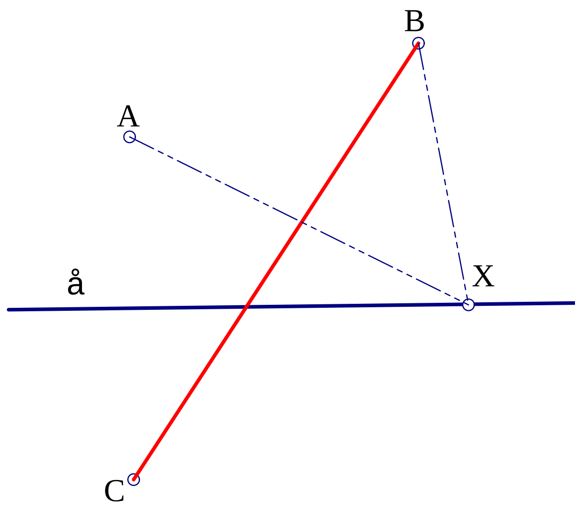
(α′) Ἂν $BB' = CC'$, τότε τὸ $\triangle ABC$ εἶναι ἰσοσκελές ($AB = AC$).

(β′) Ἂν $BM = CN$, τότε τὸ $\triangle ABC$ εἶναι ἰσοσκελές ($AB = AC$).
Ὑπόδειξη. Ἐλαφρῶς δύσκολη ἄσκηση. Θὰ τὴν καταφέρετε ἂν θυμηθῆτε ὅτι τὸ σημεῖο τομῆς τῶν διαμέσων χωρίζει τὴ διάμεσο σὲ λόγο .... Μπορεῖτε, ἐπίσης, νὰ χρησιμοποιήσετε ἁπλὲς ἰδιότητες τῶν παραλληλογράμμων.

(γ′) Ἂν $BD = CE$, τότε τὸ $\triangle ABC$ εἶναι ἰσοσκελές ($AB = AC$).
Ὑπόδειξη. Ἄσκηση-πρόκληση 'γιὰ δυνατοὺς λῦτες' (ἂν μπεῖ ὡς ὅρος νὰ μὴ χρησιμοποιήσετε μετρικὲς σχέσεις). Θὰ σᾶς διευκολύνει σημαντικὰ τὸ σχῆμα 3. Οἱ διχοτόμοι BD καὶ CE εἶναι ἴσες. Ὑποθέστε ὅτι οἱ πλευρὲς AB καὶ AC εἶναι ἄνισες, π.χ. $AC > AB$ καὶ ὁδηγηθεῖτε σὲ ἄτοπο· τὸ σχῆμα 3 σᾶς ὑποδεικνύει πῶς. Χρησιμοποιεῖστε ἀνισοτικὲς σχέσεις σὲ τρίγωνο. Κάποιοι ἀπὸ τοὺς βασικοὺς 'σταθμοὺσ' τῆς ἀπόδειξης εἶναι οἱ ἑξῆς: $b > c$, $b + f = c + g$ καὶ ὁ συνδυασμός τους δίνει $f < g$. Ἀλλὰ τότε ($\triangle FDC$) $DC < DF = BE$. Ἀπὸ τὴν ἄλλη μεριά, συγκρίνετε τὰ τρίγωνα DBC καὶ EBC καὶ συμπεράνετε ἀπ' τὴ σύγκριση ὅτι $DC > BE$. Ἀντίφαση!

Στὶς παρακάτω ἀσκήσεις οἱ κόκκινες γραμμὲς εἶναι βοηθητικές, ὑποδεικνύοντάς σας πῶς θὰ ἀποδείξετε τὸ ζητούμενο. Ἕνας κάπως ἔμπειρος λύτης θὰ ἔφερνε τὶς βοηθητικὲς αὐτὲς γραμμὲς χωρὶς τὴ δική μου ὑπόδειξη.

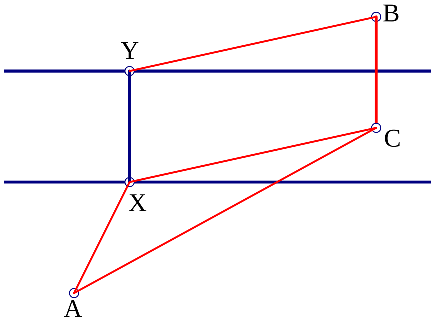
7. Στὸ σχῆμα 4 τὰ σημεῖα A, B, καθὼς καὶ ἡ εὐθεία ϵ, εἶναι σταθερά. Τὸ σημεῖο X



Σχῆμα 4: Ἄσκηση 7

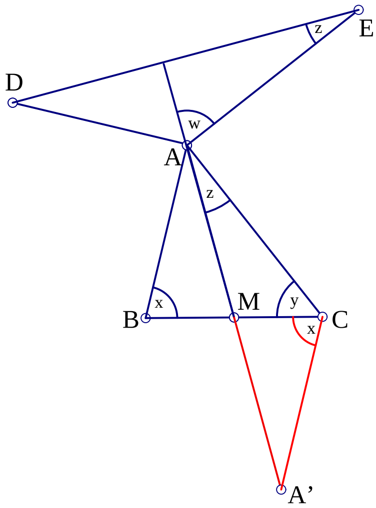
ἐπὶ τῆς εὐθείας ϵ κινεῖται καὶ ζητεῖται νὰ προσδιοριστεῖ ἐκείνη ἡ θέση τοῦ X γιὰ τὴν ὁποία ἡ τεθλασμένη διαδρομὴ AXB εἶναι ἡ ἐλάχιστη δυνατή.
Ὑπόδειξη. Στὸ σχῆμα, τὸ βοηθητικὸ σημεῖο C εἶναι συμμετρικὸ τοῦ A ὡς πρὸς τὴν ϵ.

8. Δυὸ χωριὰ A καὶ B βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῶν παραλλήλων ὄχθεων ἑνὸς ποταμοῦ (σχῆμα 5). Ποιὰ πρέπει νὰ εἶναι ἡ θέση τῆς γέφυρας XY, ἔτσι ὥστε, οἱ διαδρομὲς ἀπὸ κάθε χωριὸ μέχρι τὴ γέφυρα νὰ εἶναι ἴσες; Ἐννοεῖται ὅτι ἡ γέφυρα εἶναι κάθετη στὶς ὄχθες τοῦ ποταμοῦ.



Σχῆμα 5: Ἄσκηση 8

9. Στὸ σχῆμα 6 τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα AD εἶναι κάθετο στὴν πλευρὰ AB καὶ ἴσου μήκους μὲ αὐτήν. Ἀνάλογα, τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα AE εἶναι κάθετο στὴν πλευρὰ AC καὶ ἴσου μήκους μὲ αὐτήν. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ προέκταση τῆς διαμέσου AM εἶναι

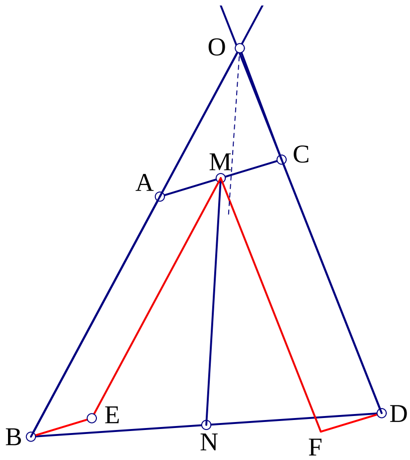


Σχῆμα 6: Ἄσκηση 9

κάθετη ἐπὶ τὴν DE.
Ὑπόδειξη. Στὸ σχῆμα, τὸ βοηθητικὸ σημεῖο A' εἶναι συμμετρικὸ τοῦ A ὡς πρὸς τὸ M. Διαφορετικὲς γωνίες μὲ τὰ ἴδια μικρὰ γράμματα εἶναι ἴσες (πρέπει νὰ ἀποδείξετε τὴν ἰσότητά τους). Ἀποδεῖξτε ὅτι $\angle DAE = \angle B + \angle C = \angle ACA'$. Τέλος, ἀποδεῖξτε ὅτι $w = \frac{\pi}{2} - z$, καὶ αὐτὸ θὰ ὁλοκληρώσει τὴν ἀπόδειξη.

10. Στὸ σχῆμα 7, τὰ μὴ παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ CD εἶναι ἴσα, τὸ M εἶναι μέσο τοῦ AC καὶ τὸ N εἶναι μέσο τοῦ BD. Ν' ἀποδείξετε ὅτι τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα MN εἶναι παράλληλο πρὸς τὴ διχοτόμο τῆς $\angle O$.
Ὑπόδειξη. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὰ σημεῖα E, N, F εἶναι συνευθειακά. Ἐπίσης, ἴσες γωνίες, μὲ παράλληλες πλευρές, ἔχουν παράλληλες διχοτόμους.

11. (Ἁπλὲς κατασκευὲς τριγώνου). Νὰ κατασκευαστεῖ τρίγωνο ABC σὲ κάθε μία ἀπὸ



Σχῆμα 7: Ἄσκηση 10

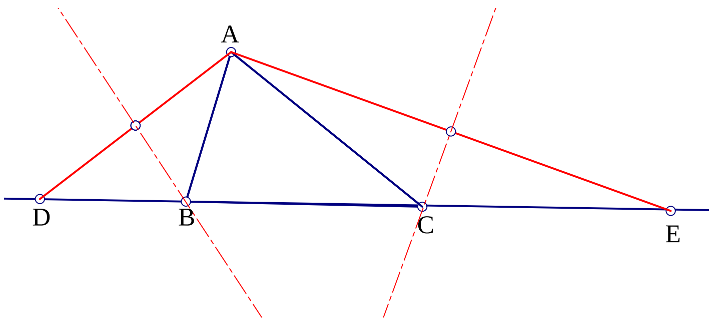
τὶς παρακάτω περιπτώσεις:

(α′) Ὅταν δίδονται τὰ μέτρα τῶν $a, \upsilon_a, \angle B$.

(β′) Ὅταν δίδονται τὰ μέτρα τῶν $a, \mu_a, \angle B$.

(γ′) Ὅταν δίδονται τὰ μέτρα τῶν a, μ_b, μ_c.

12. Νὰ κατασκευαστεῖ τρίγωνο ABC ὅταν δίδονται τὰ μέτρα τῶν $\angle B$, $\angle C$ καὶ τ.



Σχῆμα 8: Ἄσκηση 12

Ὑπόδειξη. Ἔστω ὅτι κατασκευάσατε τὸ τρίγωνο ABC. Προεκτείνετε τὴν πλευρὰ BC, ὅπως στὸ σχῆμα 8. Στὸ σχῆμα αὐτὸ εἶναι $BD = BA$ καὶ $CE = CA$. Παρατηρῆστε ὅτι στὸ τρίγωνο ADE εἶναι γνωστὸ τὸ μῆκος τῆς DE, καθὼς καὶ οἱ γωνίες (τὸ μέτρο τους) $\angle D$ καὶ $\angle E$, ἄρα μπορεῖτε νὰ τὸ κατασκευάσετε. Ἅμα ἔχετε κατασκευάσει τὸ $\triangle ADE$, δεῖτε (μὲ τὴ βοήθεια τοῦ σχήματος) πόσο εὔκολα μπορεῖτε νὰ προσδιορίσετε τὰ B καὶ C.

Καιρὸς τώρα νὰ κάνετε ἐσεῖς τὰ ἀπαιτούμενα σχήματα!

13. Ἔστω ὀρθὴ γωνία xOy. Εὐθύγραμμο τμῆμα σταθεροῦ μήκους ἔχει τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς $\angle xOy$. Ποιὸς εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου τοῦ εὐθυγράμ-

μου τμήματος καθώς αὐτὸ παίρνει ὅλες τὶς δυνατὲς θέσεις, μὲ τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς τῆς γωνίας (σὰν νὰ ὀλισθαίνει)·

14. Ἔστω ἰσοσκελὲς τρίγωνο ABC κορυφῆς A καὶ σημεῖο D ἐπὶ τῆς πλευρᾶς BC (μεταξὺ τῶν B καὶ C). Ἀπὸ τὸ D φέρομε παράλληλη πρὸς τὴν πλευρὰ AB, ἡ ὁποία τέμνει τὴν εὐθεία AC στὸ σημεῖο E καὶ παράλληλη πρὸς τὴν πλευρὰ AC, ἡ ὁποία τέμνει τὴν εὐθεία AB στὸ σημεῖο F. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ ἄθροισμα $DE + DF$ εἶναι ἀνεξάρτητο τῆς θέσεως τοῦ D· δηλαδή, εἶναι πάντοτε τὸ ἴδιο, ὁποιαδήποτε κι ἂν εἶναι ἡ θέση τοῦ D (μεταξὺ B καὶ C).
Ἂν τὸ D βρίσκεται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως της πλευρᾶς BC (ἀπὸ τὸ μέρος τοῦ B εἴτε ἀπὸ τὸ μέρος τοῦ C), τότε ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ποσότητα $|DE - DF|$ εἶναι σταθερή. Ὅταν κάνετε τὸ σχῆμα σας, σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση, θὰ παρατηρήσετε ὅτι ἕνα ἀπὸ τὰ E, F βρίσκεται στὴν προέκταση μιᾶς τῶν ἴσων πλευρῶν.

15. Ἔστω ἰσοσκελὲς τρίγωνο ABC κορυφῆς A καὶ σημεῖο D ἐπὶ τῆς πλευρᾶς BC (μεταξὺ τῶν B καὶ C). Ἀπὸ τὸ D φέρομε κάθετη πρὸς τὴν πλευρὰ AB, ἡ ὁποία τέμνει τὴν εὐθεία AC στὸ σημεῖο E καὶ κάθετη πρὸς τὴν πλευρὰ AC, ἡ ὁποία τέμνει τὴν εὐθεία AB στὸ σημεῖο F. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ ἄθροισμα $DE + DF$ εἶναι ἀνεξάρτητο τῆς θέσεως τοῦ D· δηλαδή, εἶναι πάντοτε τὸ ἴδιο, ὁποιαδήποτε κι ἂν εἶναι ἡ θέση τοῦ D (μεταξὺ B καὶ C).

16. Ἀπὸ σημεῖο D στὸ ἐσωτερικὸ ἰσοπλεύρου τριγώνου φέρομε τὰ κάθετα εὐθύγραμμα τμήματα ἐπὶ τὶς τρεῖς πλευρὲς τοῦ τριγώνου. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν αὐτῶν εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι σταθερό· δηλαδή, εἶναι πάντοτε τὸ ἴδιο, ὁποιαδήποτε κι ἂν εἶναι ἡ θέση τοῦ D (στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ τριγώνου).
Ὑπόδειξη. Χρησιμοποιεῖστε τὴν ἄσκηση 15.

17. Γεωμετρικὸς τόπος, βασιζόμενος στὴν ἄσκηση 14. Ποιὸς εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων P, τὰ ὁποῖα βρίσκονται στὸ ἐσωτερικὸ δεδομένης κυρτῆς γωνίας xOy καὶ ἔχουν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: Ἂν φέρομε ἀπὸ τὸ P παράλληλη πρὸς τὴν Ox, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Oy στὸ D καὶ παράλληλη πρὸς τὴν Oy, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ox στὸ E, τὸ ἄθροισμα $PD + PE$ ἰσοῦται πρὸς δεδομένο μῆκος ℓ.
Ὑπόδειξη. Σχηματῖστε ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο κορυφῆς O καὶ βάσεως BC, ἡ ὁποία (βάση) νὰ περιέχει τὸ P (π.χ. ἀπὸ τὸ P φέρετε κάθετη ἐπὶ τὴ διχοτόμο τῆς $\angle xOy$). Παρατηρῆστε ὅτι $OB = OC = \ell$.

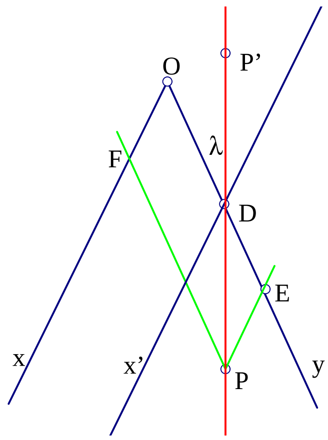
18. Κατασκευὴ βασιζόμενη στην ἄσκηση 17. Δίδονται, τρίγωνο ABC καὶ μῆκος ℓ. Νὰ προσδιορισθεῖ σημεῖο P πάνω στὴν πλευρὰ BC, μὲ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: Ἂν ἀπὸ τὸ P φέρομε παράλληλη πρὸς τὴν AC, ἡ ὁποία τέμνει τὴν AB στὸ D καὶ (ἀπὸ τὸ P) παράλληλη πρὸς τὴν AB, ἡ ὁποία τέμνει τὴν AC στὸ E, νὰ ἰσχύει $PD + PE = \ell$.

19. Γεωμετρικὸς τόπος, βασιζόμενος στὴν ἄσκηση 15. Ποιὸς εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων P, τὰ ὁποῖα βρίσκονται στὸ ἐσωτερικὸ δεδομένης κυρτῆς γωνίας xOy καὶ ἔχουν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: Ἂν φέρομε ἀπὸ τὸ P κάθετη ἐπὶ τὴν Ox, ἡ ὁποία τὴν τέμνει στὸ D καὶ κάθετη πρὸς τὴν Oy, ἡ ὁποία τὴν τέμνει στὸ E, τὸ ἄθροισμα $PD + PE$ ἰσοῦται πρὸς δεδομένο μῆκος ℓ.
Ὑπόδειξη. Σχηματῖστε ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο κορυφῆς O καὶ βάσεως BC (ἡ κορυφὴ B ἐπὶ τῆς Ox καὶ ἡ κορυφὴ C ἐπὶ τῆς Oy), ἡ ὁποία (βάση) νὰ περιέχει τὸ P (π.χ. ἀπὸ τὸ P

φέρετε κάθετη ἐπὶ τὴ διχοτόμο τῆς $\angle xOy$). Παρατηρῆστε ὅτι ἡ ἀπόσταση τοῦ B ἀπὸ τὴν Oy εἶναι ℓ καὶ ἀνάλογα γιὰ τὴν ἀπόσταση τοῦ C ἀπὸ τὴν Ox. Αὐτό, ὅμως, σημαίνει ὅτι τὰ σημεῖα B καὶ C εἶναι σταθερά.

20. Κατασκευὴ βασιζόμενη στην ἄσκηση 19. Δίδονται, τρίγωνο ABC καὶ μῆκος ℓ. Νὰ προσδιορισθεῖ σημεῖο P πάνω στὴν πλευρὰ BC, τέτοιο ὥστε, ἂν οἱ προβολὲς τοῦ P ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν εἶναι D καὶ E, νὰ ἰσχύει $PD + PE = \ell$.

21. Ἔστω κυρτὴ γωνία xOy καὶ δοθὲν μῆκος λ. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς της Oy παίρνομε σημεῖο D, τέτοιο ὥστε $OD = \lambda$, καὶ ἀπὸ τὸ D φέρνομε ἡμιευθεία Dx', στὸ ἐσωτερικὸ τῆς $\angle xOy$, παράλληλη πρὸς τὴν Ox. Ἀποδεῖξτε ὅτι κάθε σημεῖο P τῆς διχοτόμου



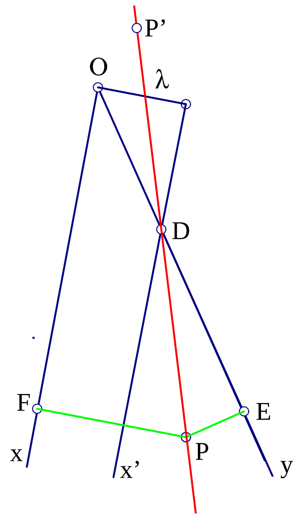
Σχῆμα 9: Ἄσκηση 21

τῆς $\angle x'Dy$ ἔχει τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: Ἂν ἀπὸ τὸ P φέρομε τὰ παράλληλα πρὸς τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας εὐθύγραμμα τμήματα PE καὶ PF, ὅπως στὸ σχῆμα 9, τότε, $PF - PE = \lambda$.
Ἀποδεῖξτε ὅτι κάτι ἐντελῶς ἀνάλογο ἰσχύει ἂν τὸ P βρίσκεται στὴν προέκταση τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $x'Dy$, ὅπως, π.χ., τὸ P' στὸ σχῆμα 9.

22. Γεωμετρικὸς τόπος βασιζόμενος στὴν ἄσκηση 21. Δίδεται κυρτὴ γωνία xOy καὶ σταθερὸ μῆκος λ. Νὰ βρεθεῖ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων P, ποὺ ἔχουν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: Ἂν ἀπὸ τὸ P φέρομε εὐθύγραμμα τμήματα PE καὶ PF πρὸς τὶς Ox καὶ Oy, ἀντιστοίχως (τὸ E ἐπὶ τῆς Oy καὶ τὸ F ἐπὶ τῆς Ox), νὰ ἰσχύει $|PF - PE| = \lambda$.

23. Κατασκευὴ βασιζόμενη στὴν ἄσκηση 22. Δίδεται τρίγωνο ABC καὶ μῆκος λ. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς BC νὰ προσδιορισθεῖ σημεῖο P, μὲ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: Ἂν φέρομε ἀπὸ τὸ P παράλληλη πρὸς τὴν πλευρὰ AB, ποὺ τέμνει τὴν AC στὸ E καὶ παράλληλη ἀπὸ τὸ P πρὸς τὴν πλευρὰ AC, ποὺ τέμνει τὴν AB στὸ F, τότε $|PF - PE| = \lambda$.

24. Ἔστω κυρτὴ γωνία xOy καὶ δοθὲν μῆκος λ. Ἐπὶ τῆς Ox ὑψώνομε κάθετο σ' αὐτὴν εὐθύγραμμο τμῆμα, πρὸς τὸ μέρος τῆς Oy, μήκους λ καὶ ἀπὸ τὸ ἄκρο του φέρομε παράλληλη πρὸς τὴν Ox, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Oy (πιθανόν, τὴν προέκτασή της, ἂν ἡ $\angle xOy$ εἶναι ἀμβλεία) στὸ D· βλ. σχῆμα 10. Κατόπιν, ἀπὸ τὸ D φέρνομε ἡμιευθεία Dx', στὸ ἐσωτερικὸ τῆς $\angle xOy$, παράλληλη πρὸς τὴν Ox. Ἀποδεῖξτε ὅτι κάθε



Σχῆμα 10: Ἄσκηση 24

σημεῖο P τῆς διχοτόμου τῆς $\angle x'Dy$ ἔχει τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: Ἂν ἀπὸ τὸ P φέρομε τὰ κάθετα πρὸς τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας εὐθύγραμμα τμήματα PE καὶ PF, ὅπως στὸ σχῆμα 10, τότε, $PF - PE = \lambda$.
Ἀποδεῖξτε ὅτι κάτι ἐντελῶς ἀνάλογο ἰσχύει ἂν τὸ P βρίσκεται στὴν προέκταση τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $x'Dy$, ὅπως, π.χ., τὸ P' στὸ σχῆμα 10.

25. Γεωμετρικὸς τόπος βασιζόμενος στὴν ἄσκηση 24. Δίδεται κυρτὴ γωνία xOy καὶ σταθερὸ μῆκος λ. Νὰ βρεθεῖ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων P, ποὺ ἔχουν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: Ἂν ἀπὸ τὸ P φέρομε εὐθύγραμμα τμήματα PF καὶ PE κάθετα ἐπὶ τὶς Ox καὶ Oy, ἀντιστοίχως (τὸ F ἐπὶ τῆς Ox καὶ τὸ E ἐπὶ τῆς Oy), νὰ ἰσχύει $|PF - PE| = \lambda$.

26. Κατασκευὴ βασιζόμενη στὴν ἄσκηση 25. Δίδεται τρίγωνο ABC καὶ μῆκος λ. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς BC νὰ προσδιορισθεῖ σημεῖο P, μὲ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα: Ἂν φέρομε ἀπὸ τὸ P φέρομε μία κάθετη ἐπὶ τὴν πλευρὰ AB, ποὺ τὴν τέμνει στὸ F καὶ μία ἄλλη κάθετη ἐπὶ τὴν πλευρὰ AC, ποὺ τὴν τέμνει στὸ E (τὸ E ἢ τὸ F πιθανὸν νὰ βρίσκεται στὴν προέκταση τῆς ἀντίστοιχης πλευρᾶς, ἂν ἡ $\angle A$ εἶναι ἀμβλεία), τότε $|PF - PE| = \lambda$.