Εὐκλείδεια Γεωμετρία

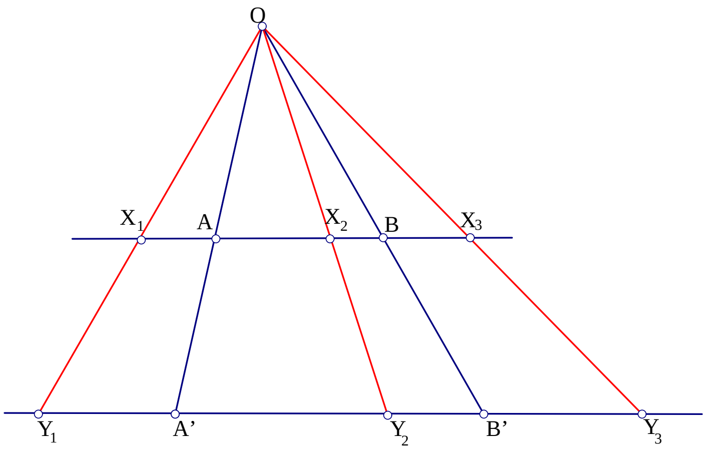
Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2010

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

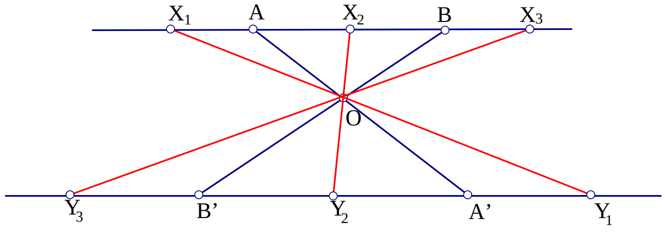
Μάθημα 14
22-11-2010

Συνοπτικὴ περιγραφή

Πρόταση τῆς Δέσμης Εὐθειῶν. *Ἔστω ὅτι τὰ σημεῖα A, B καὶ A', B' εἶναι τέτοια ὥστε οἱ εὐθεῖες AB και $A'B'$ εἶναι παράλληλες καὶ οἱ εὐθεῖες AA', BB' τέμνονται σὲ κάποιο σημεῖο O. (Δύο περιπτώσεις· βλ. σχήματα 1 καὶ 2). Ἔστω X σημεῖο τῆς AB καὶ Y σημεῖο τῆς $A'B'$, τέτοια ὥστε $\overline{XA}/\overline{XB} = \overline{YA'}/\overline{YB'}$. Τότε, ἡ εὐθεία XY διέρχεται διὰ τοῦ O.* Στὰ σχήματα



Σχῆμα 1: Δέσμη εὐθειῶν - πρώτη περίπτωση



Σχῆμα 2: Δέσμη εὐθειῶν - δεύτερη περίπτωση

1 καὶ 2 ἔχουν σχεδιαστεῖ τρεῖς διαφορετικὲς θέσεις X_1, X_2, X_3 τοῦ X –ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς

τρεῖς δυνατὲς σχετικὲς θέσεις τοῦ X ὡς πρὸς τὰ A, B– καὶ οἱ ἀντίστοιχες θέσεις Y_1, Y_2, Y_3 τοῦ Y.

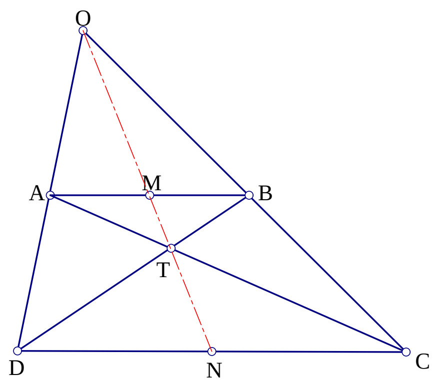
Παρατηρῆστε ὅτι στὴν πρόταση αὐτὴ ἐμφανίζονται *προσανατολισμένοι λόγοι*: Γενικά, ἂν A, B, C εἶναι σημεῖα ἐπ' εὐθείας, μὲ $C \neq B$, ὁ προσανατολισμένος λόγος $\overline{CA}/\overline{CB}$ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\overline{CA}/\overline{CB} = \begin{cases} +\frac{CA}{CB} & \text{ἂν } C \text{ ἀνήκει στὸ εὐθύγραμμο τμῆμα } AB \\ -\frac{CA}{CB} & \text{ἂν } C \text{ εἶναι ἐκτὸς τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος } AB \end{cases}$$

Παραδείγματα. (1) Γιὰ δύο διαφορετικὰ σημεῖα A, B, εἶναι $\overline{BA}/\overline{AB} = -1$.
(2) Ἂν M εἶναι τὸ μέσο τοὺ εὐθυγράμμου τμήματος AB, τότε $\overline{MA}/\overline{MB} = -1$, ἐνῶ δὲν ὑπάρχει σημεῖο N ἐπὶ τῆς εὐθείας AB μὲ τὴν ἰδιότητα $\overline{NA}/\overline{NB} = 1$.
(3) Ἂν G εἶναι τὸ κέντρο βάρους τριγώνου ABC καὶ M εἶναι τὸ μέσο τῆς BC, τότε $\overline{GA}/\overline{GM} = -2$.
(4) Ἔστω τρίγωνο ABC καὶ D, D' οἱ πόδες τῆς ἐσωτερικῆς καὶ τὴς ἐξωτερικῆς διχοτόμου, ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὴν κορυφὴ A. Ἀπὸ τὰ *Θεωρήματα τῆς διχοτόμου* ξέρομε ὅτι $DB/DC = AB/AC$ καὶ $D'B/D'C = AB/AC$. Διατυπωμένες αὐτὲς οἱ σχέσεις μὲ προσανατολισμένους λόγους, ἔχουν ὡς ἑξῆς: $\overline{DB}/\overline{DC} = -(AB/AC)$ καὶ $\overline{D'B}/\overline{D'C} = +(AB/AC)$.

Ἡ ἀπόδειξη, ἂν καὶ ἁπλῆ, συζητήθηκε λεπτομερῶς στὸ μάθημα. Βασικὴ ἰδέα εἶναι ὅτι, ἀντὶ νὰ ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ εὐθεία XY διέρχεται διὰ τοῦ O, φέρομε τὴν OX καὶ ἀποδεικνύομε ὅτι τὸ σημεῖο τομῆς της μὲ τὴν εὐθεία $A'B'$, ἔστω Z, συμπίπτει μὲ τὸ Y. Καὰ αὐτό, διότι, μὲ τὴ βοήθεια ὁμοίων τριγώνων ἀποδεικνύεται εὔκολα ὅτι $\overline{ZA}/\overline{ZB} = \overline{XA}/\overline{XB}$. Ἀλλὰ τότε, λόγῳ τῆς ὑποθέσεως $\overline{YA}/\overline{YB} = \overline{XA}/\overline{XB}$, ἔχομε καὶ $\overline{YA}/\overline{YB} = \overline{ZA}/\overline{ZB}$, ἀπ' ὅπου $Y = Z$ (δεῖτε καὶ τὸ λῆμμα τοῦ $13^{\text{ου}}$ μαθήματος).

Ἐφαρμογὴ $1^{\text{η}}$. *Ἔστω $ABCD$ τραπέζιο μὲ βάσεις AB καὶ CD, M καὶ N τὰ μέσα τῶν βάσεων, O τὸ σημεῖο τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν καὶ T τὸ σημεὶο τομῆς τῶν διαγωνίων. Ἐπιπλέον, M, N, O, T εἶναι ἁρμονικὴ τετράδα σημείων.*
Ἀπόδειξη. Ἀναφερόμαστε στὸ σχῆμα 3. 'Παραβλέπομε' τὸ T καὶ ἐφαρμόζομε τὴν πρό-

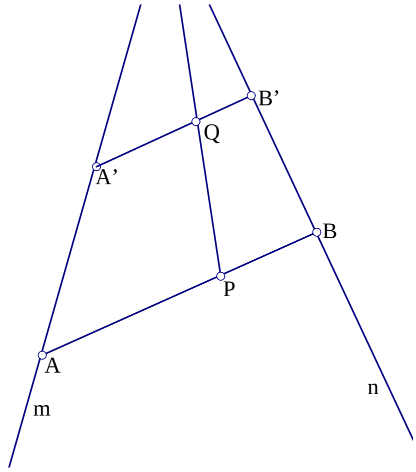


Σχῆμα 3: Δέσμη εὐθειῶν - Ἐφαρμογὴ $1^{\text{η}}$

ταση τῆς δέσμης εὐθειῶν μὲ τὰ A, B, D, C, O, M, N στὴ θέση τῶν A, B, A', B', O, X, Y τῆς πρότασης. Στὴ θέση τῶν λόγων $\overline{XA}/\overline{XB}$ καὶ $\overline{YA'}/\overline{YB'}$ τῆς πρότασης ἔχομε, κατὰ συνέπεια, $\overline{MA}/\overline{MB}$ καὶ $\overline{ND}/\overline{NC}$, ἀντιστοίχως. Ὅμως, καὶ οἱ δύο αὐτοὶ λόγοι εἶναι -1, ἄρα ἡ πρόταση μᾶς ὁδηγεῖ στὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ εὐθεία MN διέρχεται διὰ τοῦ O.

Στὴ συνέχεια, 'παραβλέπομ' τὸ O καὶ καὶ ἐφαρμόζομε τὴν πρόταση τῆς δέσμης εὐθειῶν μὲ τὰ A, B, C, D, T, M, N στὴ θέση τῶν A, B, A', B', O, X, Y τῆς πρότασης. Τώρα, στὴ θέση τῶν λόγων $\overline{XA}/\overline{XB}$ καὶ $\overline{YA'}/\overline{YB'}$ τῆς πρότασης ἔχομε τοὺς λόγους $\overline{MA}/\overline{MB}$ καὶ $\overline{NC}/\overline{ND}$. Καὶ πάλι, καθ' ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς τοὺς λόγους ἰσοῦται μὲ -1, ἄρα, ἡ πρόταση συνεπάγεται ὅτι ἡ εὐθεία MN διέρχεται διὰ τοῦ T.
Συνεπῶς, ἡ MN διέρχεται διὰ τῶν O καὶ T, δηλαδή, τὰ M, N, O, T εἶναι συνευθειακά.
Τώρα παρατηροῦμε ὅτι τὸ M εἶναι ἐντὸς τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος καὶ τὸ N ἐκτός. Γιὰ τὴν ἁρμονικότητα τῆς τετράδας M, N, O, T ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξομε ὅτι $MO/MT = NO/NT$ ';η, ἰσοδύναμα, $OM/ON = TM/TN$. Ἔχομε $OM/ON = AM/DN = (2AM)/(2DN) = AB/DC$. Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων TAM καὶ TCN ἔχομε $TM/TN = AM/CN = (2AM)/(2CN) = AB/DC$, καὶ αὐτὸ ὁλοκληρώνει τὴν ἀπόδειξη.

Ἐφαρμογὴ 2η. *Δίδονται δύο εὐθεῖες m, n, ποὺ τέμνονται ἔξω ἀπὸ τὸ χαρτὶ σχεδίασης, καὶ ἕνα σημεῖο P. Νὰ σχεδιασθεῖ ἡ εὐθεία, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὸ P καὶ ἀπὸ τὸ (ἀπρόσιτο) σημεῖο τομῆς τῶν δύο εὐθειῶν.*
Ἀπόδειξη. (Σχῆμα 4). Φέρομε τυχαία εὐθεία διὰ τοῦ P, ἡ ὁποία τέμνει τὶς m καὶ n,

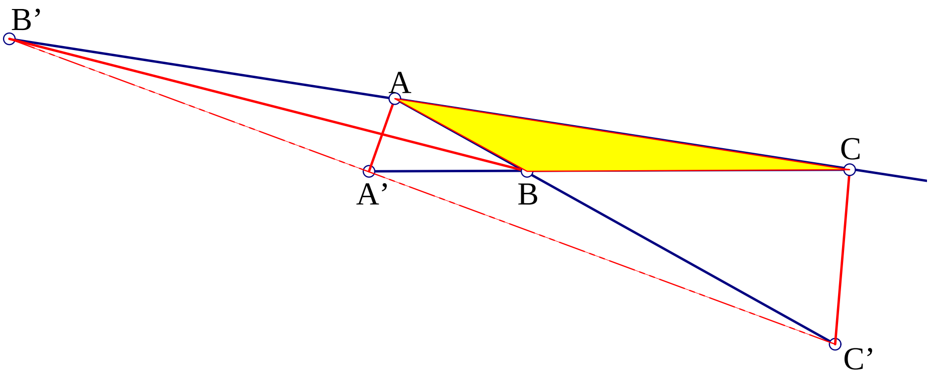


Σχῆμα 4: Δέσμη εὐθειῶν - Ἐφαρμογὴ 2η

ἔστω στὰ A καὶ B, ἀντιστοίχως. Στὴ συνέχεια φέρομε τυχαία ευθεία παράλληλη πρὸς τὴν AB, ἡ ὁποία τέμνει τὶς m καὶ n, ἔστω στὰ A' καὶ B', ἀντιστοίχως. Προσδιορίζομε σημεῖο Q τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος $A'B'$, τέτοιο ὥστε $QA'/QB' = PA/PB$ (βλ. Λῆμμα στὸ 13ο μάθημα). Εἶναι τώρα, $\overline{QA'}/\overline{QB'} = -(QA'/QB') = -(PA/PB) = \overline{PA}/\overline{PB}$, ἄρα, ἡ πρόταση τῆς δέσμης εὐθειῶν μᾶς ὁδηγεῖ στὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ εὐθεία PQ διέρχεται διὰ τοὺ σημείου τομῆς τῶν

Καποιες Ασκησεις

1. *Οἱ πόδες τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων ὁποιουδήποτε μὴ ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι σημεῖα συνευθειακά.*
Σημείωση: Ὑποθέτομε ὅτι τὸ τρίγωνο δὲν εἶναι ἰσοσκελές, προκειμένου κάθε ἐξωτερικὴ διχοτόμος νὰ τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρά.
Ἀπόδειξη. Στὸ σχῆμα 5 οἱ AA', BB', CC' εἶναι ἐξωτερικὲς διχοτόμοι, ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς κορυφὲς A, B καὶ C, ἀντιστοίχως. Οἱ πόδες A', B', C' αὐτῶν τῶν διχοτόμων βρίσκονται, καὶ



Σχῆμα 5: Οἱ πόδες τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων κεῖνται ἐπ' εὐθείας

οἱ τρεῖς, στὶς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Ἄρα, ἂν ἀποδείξομε ὅτι

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1\,, \tag{1}$$

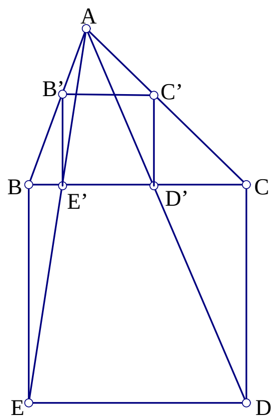
τότε, βάσει τοῦ *θεωρήματος τοῦ Μενελάου* θὰ συμπεράνομε ὅτι τὰ A', B', C' εἶναι συνευθειακά.
Γιὰ τὴν ἀπόδειξη τῆς (1) ἐφαρμόζομε τὸ *θεώρημα τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου* καὶ γιὰ τὶς τρεῖς ἐεξωτερικὲς διχοτόμους:

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{AB}{AC}\,, \quad \frac{B'C}{B'A} = \frac{BC}{BA}\,, \quad \frac{C'A}{C'B} = \frac{CA}{CB}\,.$$

Πολλαπλασιάζοντας κατὰ μέλη τὶς παραπάνω τρεῖς σχέσεις παίρνομε τὴν (1).

2. *Ἐξωτερικῶς τῆς πλευρᾶς BC τριγώνου ABC κατασκευάζομε τετράγωνο $BCDE$.*

Οἱ AD καὶ AE τέμνουν τὴν BC στὰ σημεῖα D' καὶ E', ἀντιστοίχως. Ἀπὸ τὰ D' καὶ E' ὑψώνομε κάθετες ἐπὶ τὴν BC, ποὺ τέμνουν τὶς AB καὶ AC στὰ B' καὶ C', ἀντιστοίχως. Ἀποδεῖξτε ὅτι τὸ τετράπλευρο $B'C'D'E'$ εἶναι τετράγωνο. (Σχῆμα 6)



Σχῆμα 6: Ἄσκηση 2

Ἀπόδειξη. Δική σας!

3. *Δίδεται τρίγωνο ABC. Νὰ κατασκευαστεῖ τετράγωνο $PQRS$, τέτοιο ὥστε, οἱ (διαδοχικὲς) κορυφὲς P, Q νὰ βρίσκονται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς BC καὶ οἱ ἄλλες δύο κορυφὲς R, S νὰ βρίσκονται, ἀντιστοίχως, στὶς δύο ἄλλες πλευρὲς τοῦ τριγώνου.*

Ἀπόδειξη. Ἐφαρμογὴ τῆς ἀσκήσεως 2.