Εὐκλείδεια Γεωμετρία

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2010

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Μάθημα 15
24-11-2010

Συνοπτικὴ περιγραφή

Προτάθηκε ἡ ἑξῆς ἄσκηση γιὰ τὴν προσωπικὴ μελέτη σας.
Ἄσκηση 1. *Ἔστω ὅτι τὰ σημεῖα A', B', C' βρίσκονται, ἀντιστοίχως, ἐπὶ τῶν πλευρῶν BC, CA, AB τοῦ τριγώνου ABC καὶ εἶναι τέτοια ὥστε οἱ εὐθεῖες AA', BB', CC' νὰ συντρέχουν (νὰ περνοῦν ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο). Ἂν A'' εἶναι τὸ συμμετρικὸ τοῦ A' ὡς πρὸς τὸ μέσο τῆς BC, B'' εἶναι τὸ συμμετρικὸ τοῦ B' ὡς πρὸς τὸ μέσο τῆς CA καὶ C'' εἶναι τὸ συμμετρικὸ τοῦ C' ὡς πρὸς τὸ μέσο τῆς AB, δεῖξτε ὅτι καὶ οἱ εὐθεῖες AA'', BB'', CC'' εἶναι συντρέχουσες.*
Γιὰ τὴν ἀπόδειξη θὰ κάνετε χρήση τοῦ θεωρήματος τοῦ Ceva. Παρατηρῆστε ὅτι, ἂν M, εἶναι τὸ μέσο τῆς BC, τότε τὸ M εἶναι μέσο καὶ τοῦ $A'A''$. Αὐτὴ ἡ παρατήρηση σᾶς ἐπιτρέπει νὰ βρεῖτε μιὰ ἁπλῆ σχέση, ποὺ συνδέει τοὺς λόγους $A'B/A'C$ καὶ $A''B/A''C$.

Στὴ συνέχεια ἀποδείχθηκε μία ἁπλῆ, χρήσιμη πρόταση. Θὰ χρησιμοποιοῦμε τὸν συμβολισμὸ (XYZ) γιὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ $\triangle XYZ$.

Πρόταση. *Ἂν γιὰ τὰ τρίγωνα ABC καὶ $A'B'C'$ ἰσχύει ὅτι οἱ γωνίες $\angle A'$ καὶ $\angle A$ εἶναι ἴσες ἢ παραπληρωματικές, τότε* $\dfrac{(A'B'C')}{(ABC)} = \dfrac{A'B' \cdot A'C'}{AB \cdot AC}$.

Ἀπόδειξη. Ὡς συνήθως, οἱ πλευρὲς BC, CA, AB τοῦ $\triangle ABC$ συμβολίζονται, ἀντιστοίχως, μὲ a, b, c. Ἐντελῶς ἀνάλογα, οἱ πλευρὲς τοῦ $\triangle A'B'C'$ συμβολίζονται μὲ a', b', c'. Στὸ 5^{o} μάθημα ἀποδείξαμε ὅτι $(ABC) = \frac{1}{2}bc\sin A$. Ἀναλόγως, ἰσχύει $(A'B'C') = \frac{1}{2}b'c'\sin A'$. Ἀλλὰ ἴσες ἢ παραπληρωματικὲς γωνίες ἔχουν ἴσα ἡμίτονα, ἄρα $\sin A' = \sin A$. Διαιρώντας κατὰ μέλη τὶς ἐκφράσεις τῶν ἐμβαδῶν, παίρνομε τὴν ἀποδεικτέα σχέση.

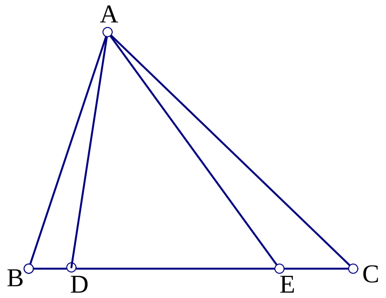
Ἄσκηση 2. *Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς BC τριγώνου ABC θεωροῦμε τὰ σημεῖα D, E, τέτοια ὥστε οἱ εὐθεῖες AD καὶ AE νὰ εἶναι ἰσοκλινεῖς ὡς πρὸς τὶς πλευρὲς AB καὶ AC, ἀντιστοίχως· δηλαδή, $\angle BAD = \angle CAE$ (σχῆμα 1). Ἀποδεῖξτε ὅτι*

$$\frac{BD \cdot BE}{CD \cdot CE} = \frac{AB^2}{AC^2}\,.$$

Ἀπόδειξη. Ἐφαρμόζομε τὴν πρόταση στὴν περίπτωση τῶν τριγώνων ABD καὶ AEC ($\angle BAD = \angle CAE$), ὁπότε

$$\frac{(ABD)}{(AEC)} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AE}\,.$$

Ὅμως, καθὼς τὰ τρίγωνα ABD καὶ AEC ἔχουν κοινὸ ὕψος, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τους ἰσοῦται μὲ τὸν λόγο τῶν βάσεών τους, δηλαδή, $(ABD)/(ACE) = BD/CE$. Συνεπῶς,



Σχῆμα 1: Ἄσκηση 2

λόγῳ καὶ τῆς παραπάνω σχέσεως,

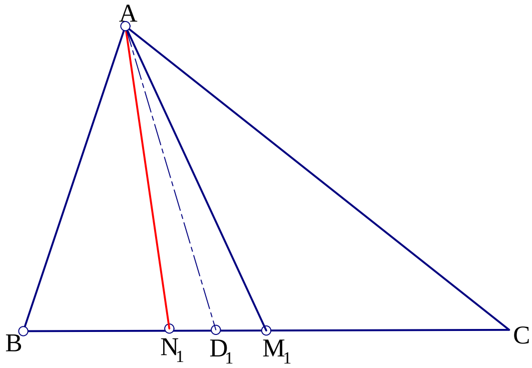
$$\frac{BD}{CE} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AE} .$$

Ἐντελῶς ἀνάλογα, ἐφαρμόζοντας τὴν πρόταση στὰ τρίγωνα ABE καὶ ADC ($\angle BAE = \angle CAD$), καταλήγομε στὴ σχέση

$$\frac{BE}{CD} = \frac{AB \cdot AE}{AC \cdot AD}$$

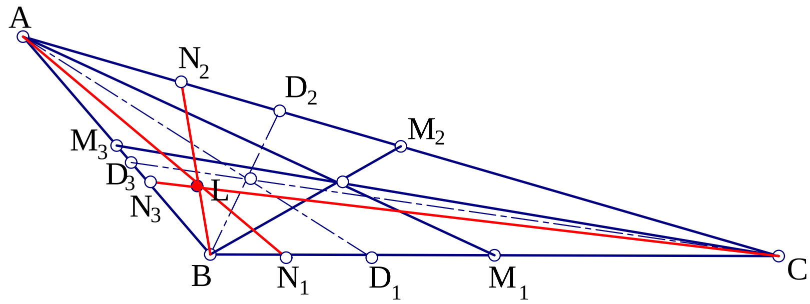
καὶ πολλαπλασιάζοντας τὶς δύο τελευταῖες σχέσεις κατὰ μέλη, παίρνομε τὴν ἀποδεικτέα.

Γιὰ τὴν παρακάτω ἄσκηση χρειαζόμαστε τὴν ἔννοια τῆς *συμμετροδιαμέσου* τριγώνου: Ἔστω τρίγωνο ABC καὶ AM_1, AD_1 ἡ διάμεσος καὶ ἡ διχοτόμος, ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὴν κορυφὴ A. Ἡ εὐθεία, ποὺ εἶναι συμμετρικὴ τῆς διαμέσου AM_1 ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴ διχοτόμο AD_1, λέγεται *συμμετροδιάμεσος* τοῦ τριγώνου, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ στὴν κορυφὴ A· βλ. σχῆμα 2. Ἔστω N_1 τὸ σημεῖο, ποὺ ἡ συμμετροδιάμεσος τέμνει τὴν BC. Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς συμμετροδιαμέσου προκύπτει ἀμέσως ὅτι $\angle N_1AD_1 = \angle M_1AD_1$. Προφανῶς ὑπάρχουν τρεῖς συμμετροδιάμεσοι γιὰ κάθε τρίγωνο.



Σχῆμα 2: Ἄσκηση 3

Ἄσκηση 3 - Σημεῖο Lemoine τριγώνου. *Σὲ ὁποιοδήποτε τρίγωνο, οἱ τρεῖς συμμετροδιάμεσοι διέρχονται ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο, τὸ ὁποῖο λέγεται σημεῖο Lemoine τοῦ τριγώνου* (σχῆμα 3· οἱ συμμετροδιάμεσοι εἶναι μὲ κόκκινο χρῶμα, οἱ διάμεσοι μὲ γαλάζιο καὶ οἱ διχοτόμοι μὲ διακεκομμένες γραμμές).



Σχῆμα 3: Συμμετροδιάμεσοι τριγώνου καὶ σημεῖο Lemoine L.

Ἀπόδειξη. Γιὰ τὴν ἀπόδειξη θὰ ἑστιάσομε τὴν προσοχή μας μόνο στὴ συμμετροδιάμεσο, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ στὴν κορυφὴ A (σχῆμα 2). Παρατηρῆστε ὅτι οἱ εὐθεῖες AN_1 καὶ AM_1 εἶναι ἰσοκλινεῖς ὡς πρὸς τὶς πλευρὲς AB καὶ AC, ἀντιστοίχως, ἄρα ἐφαρμόζεται ἡ ἄσκηση 2 καὶ παίρνομε

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BN_1 \cdot BM_1}{CN_1 \cdot CM_1} = \frac{N_1B}{N_1C} \qquad (BM_1 = CM_1)$$

Ἐντελῶς ἀνάλογα (βλ. σχῆμα 3),

$$\frac{N_2C}{N_2A} = \frac{BC^2}{BA^2}, \quad \frac{N_3A}{N_3B} = \frac{CA^2}{CB^2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας κατὰ μέλη τὶς τρεῖς τελευταῖες σχέσεις, παίρνομε

$$\frac{N_1B}{N_1C} \cdot \frac{N_2C}{N_2A} \cdot \frac{N_3A}{N_3B} = 1,$$

ὁπότε, ἀπὸ τὸ θεώρημα τοῦ Ceva ἕπεται ὅτι οἱ συμμετροδιάμεσοι AN_1, BN_2, CN_3 περνοῦν ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖο.