Εὐκλείδεια Γεωμετρία

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2010

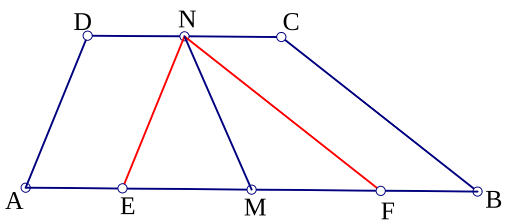
Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Μάθημα 19
8-12-2010

Συνοπτικὴ περιγραφή

Ἀσκήσεις – ἐφαρμογὲς τοῦ Α′ Θεωρήματος Διαμέσων

1. *Ἔστω τραπέζιο $ABCD$ μὲ βάσεις $AB = a$ καὶ $CD = c$. Ἔστω, ἐπίσης, $BC = b$, $DA = d$ καὶ M, N τὰ μέσα τῶν AB καὶ CD, ἀντιστοίχως. Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ MN συναρτήσει τῶν a, b, c, d.*
Λύση. (σχῆμα 1) Φέρομε τὴ NE παράλληλη πρὸς στὴν AD καὶ τὴ NF παράλληλη πρὸς



Σχῆμα 1: Ἄσκηση 1

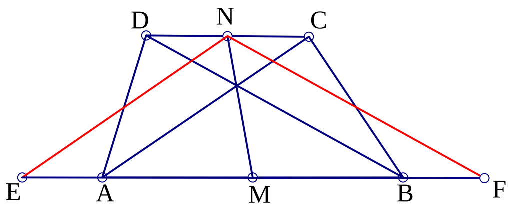
τὴν BC. Ἐπειδὴ $AE = DN = NC = FB$, ἕπεται ὅτι τὸ M εἶναι μέσο τῆς EF, ὁπότε ἐφαρμόζομε τὸ Α′ Θεώρημα τῆς διαμέσου στὸ τρίγωνο NEF. Εἶναι $NE = DA = d$, $NF = CB = b$ καὶ $EF = AB - (AE + FB) = AB - (DN + NC) = a - c$, ὁπότε

$$d^2 + b^2 = 2 \cdot MN^2 + \frac{EF^2}{2} = 2 \cdot MN^2 + \frac{(a-c)^2}{2},$$

ἀπ' ὅπου ὑπολογίζεται τὸ MN συναρτήσει τῶν a, b, c, d.

2. *Ἔστω τραπέζιο $ABCD$ μὲ βάσεις $AB = a$ καὶ $CD = c$. Ἔστω, ἐπίσης, ὅτι οἱ διαγώνιοι ἔχουν μήκη $AC = \delta_1$ καὶ $BD = \delta_2$ καὶ M, N εἶναι τὰ μέσα τῶν AB καὶ CD, ἀντιστοίχως. Νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ MN συναρτήσει τῶν a, c, δ_1, δ_2.*
Λύση. (σχῆμα 2) Φέρομε τὴ NE παράλληλη πρὸς στὴν AC καὶ τὴ NF παράλληλη πρὸς τὴν BD. Ἐπειδὴ $EA = NC = ND = FB$, ἕπεται ὅτι τὸ M εἶναι μέσο τῆς EF, ὁπότε ἐφαρμόζομε τὸ Α′ Θεώρημα τῆς διαμέσου στὸ τρίγωνο NEF. Εἶναι $NE = CA = \delta_1$, $NF = DB = \delta_2$ καὶ $EF = AB + (EA + BF) = AB + (NC + DN) = a + c$, ὁπότε

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 = 2 \cdot MN^2 + \frac{EF^2}{2} = 2 \cdot MN^2 + \frac{(a+c)^2}{2},$$

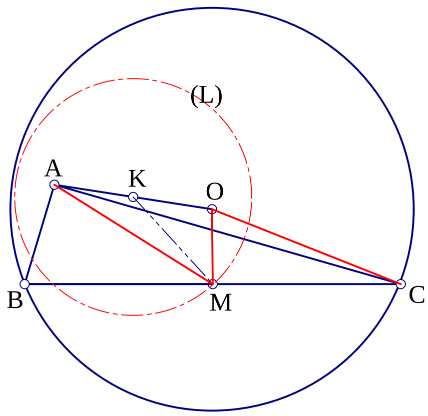


Σχῆμα 2: Ἄσκηση 2

ἀπ' ὅπου ὑπολογίζεται τὸ MN συναρτήσει τῶν a, b, δ_1, δ_2.

3. *Ἔστω σημεῖο A στὸ ἐσωτερικὸ κύκλου κέντρου O καὶ ἀκτίνας R. Ὀρθὴ γωνία, μὲ κορυφὴ τὸ A περιστρέφεται περὶ τὸ A καὶ ἔστω ὅτι B καὶ C εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τῶν πλευρῶν της μὲ τὸν κύκλο. Τέλος, ἔστω K τὸ μέσο τοῦ OA καὶ M τὸ μέσο τῆς χορδῆς BC. Ὑπολογῖστε τὸ KM συναρτήσει σταθερῶν, μόνο, μεγεθῶν. Ποιὸς εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ M καθὼς ἡ ὀρθὴ γωνία $\angle BAC$ περιστρέφεται περὶ τὸ A;*

Λύση. (σχῆμα 3) Ἐφαρμόζομε τὸ Α' Θεώρημα τῆς διαμέσου στὸ τρίγωνο MOA:



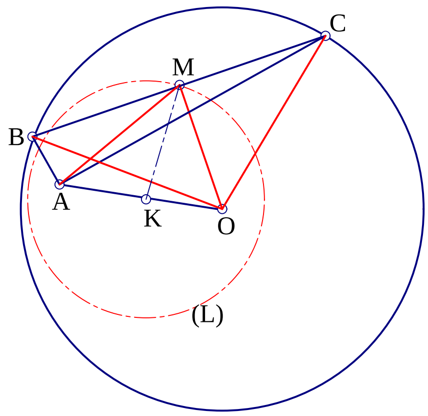
Σχῆμα 3: Ἄσκηση 3

$$MA^2 + MO^2 = 2 \cdot MK^2 + \frac{OA^2}{2}\,. \tag{1}$$

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο BAC ἔχομε ὅτι $MA = BC/2 = MC$, ἄρα, λόγω καὶ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου MOC, $MA^2 = MC^2 = R^2 - MO^2$, ὁπότε τὸ ἀριστερὸ μέλος τῆς (1) ἰσοῦται μὲ R^2. Ἄρα, τελικά,

$$MK = \sqrt{\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{4}OA^2}\,. \tag{2}$$

Ἄρα ὑπολογίσθηκε τὸ MN συναρτήσει τῶν σταθερῶν μεγεθῶν R και OA.
Ἐπειδὴ τὸ K εἶναι σταθερό, ὡς μέσο τοῦ σταθεροῦ εὐθυγράμμου τμήματος OA, ἕπεται ὅτι τὸ M ἀνήκει στὸν σταθερὸ κύκλο (L), κέντρου K καὶ ἀκτίνας ἴσης μὲ τὸ δεξιὸ μέλος τῆς (2).



Σχῆμα 4: Ἄσκηση 3 - ἀντίστροφο τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου

Ἀντιστρόφως, ἔστω σημεῖο M τοῦ κύκλου (L). (σχῆμα 4) Ἔστω BC ἡ χορδὴ τοῦ ἀρχικοῦ κύκλου, ἡ ὁποία εἶναι κάθετη στὸ OM, ὁπότε τὸ M εἶναι μέσο τῆς BC. Θὰ δείξομε ὅτι $\angle BA = 90^oC$. Τὸ Α΄ Θεώρημα τῆς διαμέσου, ἐφαρμοζόμενο στὸ τρίγωνο MAO δίνει $MA^2 + MO^2 = 2 \cdot MK^2 + OA^2/2$. Ἀλλὰ ὁ κύκλος (L), στὸν ὁποῖο ἀνήκει τὸ M ἔχει ἀκτίνα $\sqrt{R^2/2 - OA^2/4}$, ἄρα, $MA^2 + MO^2 = (R^2 - OA^2/2) + OA^2/2 = R^2$, ὁπότε, $MA^2 = R^2 - MO^2$. Ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα MOC καὶ MOB ἕπεται ὅτι $MC^2 = OC^2 - MO^2 = R^2 - MO^2$ καί, ἀνάλογα, $MB^2 = R^2 - MO^2$. Ἄρα, $MA = MB = MC$, δηλαδή, τὸ A ἀνήκει στὸν κύκλο διαμέτρου BC καί, συνεπῶς, $\angle BAC = 90^o$.