Εὐκλείδεια Γεωμετρία

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2010

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Μάθημα 21
15-12-2010

Συνοπτικὴ περιγραφή

Συζητήθηκαν κάποιες ἀπὸ τὶς *Γενικὲς Ἀσκήσεις* τοῦ ἐδαφίου 9.7, σελίδα 204 τοῦ σχολικοῦ βιβλίου.

1. *Θεωροῦμε δύο εὐθεῖες ϵ_1, ϵ_2, ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ τὰ σημεῖα A, B καὶ C, D, ἀντιστοίχως. Ἂν οἱ εὐθεῖες εἶναι κάθετες, ἀποδεῖξτε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$. Ἀντιστρόφως: Ἂν ἰσχύει ἡ σχέση $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$, τότε οἱ ϵ_1, ϵ_2 εἶναι κάθετες.*

   Ἡ ἄσκηση λύνεται μὲ ἁπλῆ ἐφαρμογὴ τοῦ Β′ Θεωρήματος τῆς Διαμέσου. Γιὰ τὴν ἀπόδειξη τοῦ ἀντιστρόφου εἶναι απαραίτητο νὰ ξέρομε ὅτι τὰ σημεῖα A καὶ B ἀνήκουν στὸ ἴδιο ἡμιεπίπεδο ὡς πρὸς τὴ μεσοκάθετο τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος CD. Αὐτὸ ἰσχύει, ὅμως, διότι, ἡ σχέση $AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$ συνεπάγεται ὅτι $AC > AD \Leftrightarrow BC > BD$, δηλαδή, τὸ A ἀνήκει στὸ ἴδιο ἡμιεπίπεδο μὲ τὸ D (ὡς πρὸς τὴ μεσοκάθετο τοῦ CD), ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ B ἀνήκει στὸ ἴδιο ἡμιεπίπεδο μὲ τὸ D.

2. *Ἔστω τρίγωνο ABC καὶ AD ἡ διχοτόμος τῆς $\angle A$ (D τὸ σημεῖο τομῆς τῆς διχοτόμου μὲ τὴν πλευρὰ BC). Ἀποδεῖξτε ὅτι $AB \cdot AC = AD^2 + DB \cdot DC$.*
   Γιὰ τὴν ἀπόδειξη ἐφαρμόσαμε τὸ θεώρημα τοῦ Stewart (μάθημα 16^o) καὶ πήραμε τὴ σχέση
   $$DB \cdot AC^2 + DC \cdot AB^2 = BC(AD^2 + DB \cdot DC)\,.$$
   Μὲ τὸν καθιερωμένο συμβολισμό, $BC = a$, $CA = b$ καὶ $AB = c$. Ἀπὸ τὸ θεώρημα τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου, $DB/DC = AB/AC = c/b$, ἄρα $DB = ac/(b+c)$, $DC = ab/(b+c)$ καὶ ἀντικαθιστώντας στὸ ἀριστερὸ μέλος τῆς παραπάνω σχέσης, ὑπολογίζομε εὔκολα ὅτι αὐτὸ ἰσοῦται μὲ $abc = BC \cdot AB \cdot AC$. Ἄρα, τὸ δεξιὸ μέλος τῆς παραπάνω σχέσης, $BC(AD^2 + DB \cdot DC)$, ἰσοῦται μὲ $BC \cdot AB \cdot AC$, ποὺ εἶναι τὸ ἀποδεικτέο.

3. *Ἔστω ABC ὀξυγώνιο τρίγωνο, M τὸ μέσο τῆς πλευρᾶς BC καὶ BD τὸ ὕψος ἀπὸ τὴν κορυφὴ B. Ἀποδεῖξτε ὅτι $AM^2 = BM^2 + AD \cdot AC$.*
   Γιὰ τὴ λύση της δόθηκαν οἱ ἑξῆς ὑποδείξεις: Ἡ ἀποδεικτέα εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν $MA^2 - MC^2 = AD \cdot AC$. Ἐφαρμογὴ τοῦ Β′ Θεωρήματος τῆς διαμέσου στὸ τρίγωνο MAC γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ἀριστεροῦ μέλους. Θὰ χρειαστεῖτε τὸ μέσο N τῆς AC καὶ τὴν προβολὴ E τοῦ M πάνω στὴν AC. Ἀποδεῖξτε ὅτι $AD = 2 \cdot NE$.
   Γιὰ νὰ εἶναι πλήρης ἡ ἀπόδειξη, χρειάζεται ν' ἀποδείξει κανεὶς ὅτι $AM > MC$ ἤ, ἰσοδύναμα, $AM^2 > a^2/4$. Ἀλλά, ἀπὸ τὸ Α′ Θεώρημα τῆς Διαμέσου στὸ τρίγωνο ABC,

ἔχομε $AM^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$, ἄρα, ἡ σχέση $AM^2 > a^2/4$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν $b^2+c^2-a^2 > 0$, ποὺ ἰσχύει, ἀφοῦ ἡ γωνία $\angle A$ εἶναι ὀξεία.

4. *Ἔστω ὅτι στὸ τρίγωνο ABC οἱ διάμεσοι BM καὶ CN τέμνονται καθέτως. Ἀποδεῖξτε ὅτι* $b^2 + c^2 = 5a^2$. $(a = BC, b = CA, c = AB.)$
   Δόθηκε οἱ ἑξῆς ὑποδείξεις: Ἔστω AK ἡ διάμεσος ἀπὸ τὸ A καὶ G τὸ σημεῖο τομῆς τῶν διαμέσων (κέντρο βάρους). Θυμηθῆτε ὅτι, ἂν $GK = x$, τότε $AK = 3x$. Ἀφ' ἑτέρου, GK εἶναι διάμεσος καὶ τοῦ τριγώνου GBC, τὸ ὁποῖο εἶναι ὀρθογώνιο στὸ G, ἄρα .... Ἐφαρμογὴ τοῦ Α' Θεωρήματος τῆς Διαμέσου στὸ τρίγωνο ABC.

5. *Ἔστω ὀξυγώνιο τρίγωνο ABC, AM ἡ διάμεσος ἀπὸ τὸ A καὶ D ἡ προβολὴ τοῦ M πάνω στὴν εὐθεία AB. Ἀποδεῖξτε τὴ σχέση* $BC^2 = 3 \cdot AB^2 + AC^2 - 4 \cdot AB \cdot AD$.
   Ὑποδείξεις: Παρατηρῆστε ὅτι, στὸ τρίγωνο MAB, οἱ γωνίες, ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς κορυφὲς A καὶ B εἶναι ὀξεῖες καί, συνεπῶς, τὸ σημεῖο D βρίσκεται μεταξὺ τῶν B καὶ A. Ἐφαρμογὴ τῆς γενίκευσης τοῦ Πυθαγορείου Θεωρήματος στὸ τρίγωνο ABM: $BM^2 = AB^2 + AM^2 - \ldots$. Ἀπὸ τὸ Α' Θεώρημα τῆς Διαμέσου, τὸ AM^2 ἐκφράζεται συναρτήσει τῶν $a^2, b^2, c^2 \ldots$.

6. *Σὲ κύκλο κέντρου O καὶ ἀκτίνας R θεωροῦμε μιὰ ἀκτίνα OA σταθερή. Χορδὴ BC τοῦ κύκλου μετακινεῖται ἔτσι ὥστε νὰ παραμένει παράλληλη πρὸς τὴν OA. Ἀποδεῖξτε ὅτι, ὁποιαδήποτε κι ἂν εἶναι ἡ θέση τῆς BC, ἰσχύει* $AB^2 + AC^2 = 4R^2$.
   Ὑπόδειξη: Ἔστω M τὸ μέσο τῆς BC. Παρατηρῆστε ὅτι τὸ OM εἶναι κάθετο στὴν BC καὶ στὴν OA. Ἐφαρμογὴ τοῦ Α' Θεωρήματος τῆς Διαμέσου στὸ τρίγωνο ABC.