Εὐκλείδεια Γεωμετρία

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2010

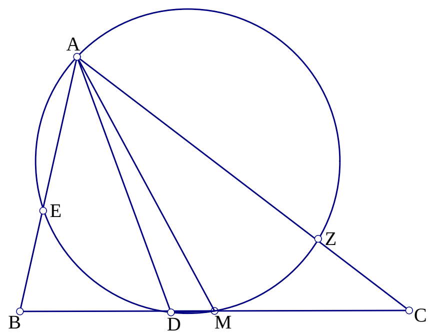
Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Μάθημα 23
12-1-2011

Συνοπτικὴ περιγραφή

Λύθηκαν λεπτομερῶς οἱ ἑξῆς ἀσκήσεις ἀπὸ τὸ σχολικὸ βιβλίο (αὐτούσιες ἢ μὲ μικρὲς παραλλαγές).

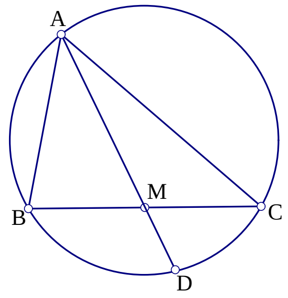
1. *Ἔστω τρίγωνο ABC. Θεωροῦμε τὴ διάμεσο AM, τὴ διχοτόμο AD καὶ τὸν κύκλο τὸν περιγεγραμμένο περὶ τὸ τρίγωνο ADM. Ἐκτὸς ἀπὸ τὸ A, ὁ κύκλος αὐτὸς τέμνει τὶς εὐθεῖες AB καὶ AC στὰ σημεῖα E καὶ Z, ἀντιστοίχως AB καὶ AC, ἀντιστοίχως. Δεῖξτε ὅτι $BE = CZ$.*



Σχῆμα 1: Ἄσκηση 1

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\mathcal{C}$ ὁ κύκλος περὶ τὸ τρίγωνο ADM. Ἀπὸ τὴ δύναμη τοῦ B ὡς πρὸς τὸν $\mathcal{C}$ ἔχομε $BE \cdot BA = BD \cdot BM$, ἐνῶ ἀπὸ τὴ δύναμη τοῦ C ὡς πρὸς τὸν $\mathcal{C}$ ἔχομε $CZ \cdot CA = CM \cdot CD$. Ἄρα $BE = \frac{DB}{BA} BM$ καὶ $CZ = \frac{DC}{CA} CM$. Ἐπειδὴ $BM = CM$, ἀρκεῖ νὰ ἰσχύει $DB/BA = DC/CA$. Αὐτό, ὅμως, ἀληθεύει, λόγῳ τοῦ Θεωρήματος τῆς Διχοτόμου, ποὺ μᾶς λέει ὅτι $DB/DC = AB/AC$.

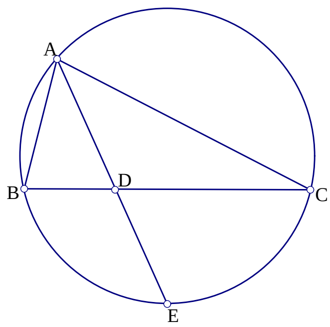
2. *Ἔστω τρίγωνο ABC, γιὰ τὸ ὁποῖο ἰσχύει $b^2 + c^2 = 2a^2$ (ὡς συνήθως, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$). Ἔστω ὅτι ἡ διάμεσος AM τοῦ τριγώνου, προεκτεινόμενη, τέμνει τὸν περιγεγραμμένο κύκλο τοῦ τριγώνου στὸ σημεῖο D. Ἀποδεῖξτε ὅτι $MD = a\sqrt{3}/6$.*



Σχῆμα 2: Ἄσκηση 2

Ἀπόδειξη. Τὸ Αʹ Θεώρημα τῆς Διαμέσου μᾶς δίνει $b^2 + c^2 = 2 \cdot AM^2 + a^2/2$, ἐνῶ τὸ ἀριστερὸ μέλος, ἐξ ὑποθέσεως, ἰσοῦται μὲ $2a^2$, ὁπότε $2 \cdot AM^2 = 2a^2 - (a^2/2) = 3a^2/2$, δηλαδή, $AM = a\sqrt{3}/2$. Ἀπὸ τὴν ἄλλη μεριά, ἡ δύναμη τοῦ σημείου M ὡς πρὸς τὸν κύκλο περὶ τὸ τρίγωνο ABC μᾶς δίνει $MA \cdot MD = MB \cdot MC = (a/2) \cdot (a/2) = a^2/4$. Ἄρα, $MD = (a^2/4) : MA = (a^2/4) : (a\sqrt{3}/2) = a\sqrt{3}/6$.

3. *Ἔστω τρίγωνο ABC, AD ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\angle A$ καὶ ἔστω ὅτι ἰσχύει $AD^2 = DB \cdot DC$. Ἂν προεκτεινόμενη ἡ AD τέμνει τὸν περιγεγραμμένο κύκλο τοῦ τριγώνου στὸ E, ἀποδεῖξτε τὰ ἑξῆς (1) $AD = DE$. (2) $(b + c)^2 = 2a^2$ καὶ (3) $AE^2 = 2 \cdot EC^2$.*



Σχῆμα 3: Ἄσκηση 3

Ἀπόδειξη. Ἀπὸ τὴ δύναμη τοῦ σημείου D ὡς πρὸς τὸν κύκλο περὶ τὸ τρίγωνο ABC ἔχομε $DA \cdot DE = DB \cdot DC =$ (ὑπόθεση) DA^2, ἄρα $DA = DE$.
Στὸ μάθημα εἴπαμε πολλὲς φορὲς ὅτι, ἀπὸ τὸ Θεώρημα τῆς Διχοτόμου, μὲ ἁπλὲς ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν, μποροῦμε νὰ ἐκφράσομε τὰ DB καὶ DC συναρτήσει τῶν a, b, c, ἐνῶ, ἀπὸ τὸ Θεώρημα τοῦ Stewart (Διάλεξη 16^{η}), ἡ διχοτόμος AD ἐκφράζεται, ἐπίσης, συναρτήσει τῶν a, b, c. Συγκεκριμένα,

$$DB = \frac{ac}{b+c}, \quad DC = \frac{ab}{b+c}, \quad AD^2 = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right).$$

Ἄρα, ἡ ὑπόθεση $AD^2 = DB \cdot DC$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν

$$bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right) = \frac{ac}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c}$$

καὶ ὕστερα ἀπὸ ἁπλὲς ἀλγεβρικὲς πράξεις καταλήγομε στὴν $(b+c)^2 - a^2 = a^2$, ποὺ εἶναι ἡ ἀποδεικτέα σχέση (2).
Γιὰ τὴν ἀπόδειξη τοῦ (3) ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Στὸ τρίγωνο CAE ἡ CD εἶναι διάμεσος, λόγω τοῦ (1). Ἄρα, ἀπὸ τὸ Α΄ Θεώρημα τῆς Διαμέσου, $CA^2 + CE^2 = 2 \cdot CD^2 + \frac{1}{2}AE^2$. Ἂν δείξομε ὅτι $CA^2 = 2 \cdot CD^2$, τότε ἔχομε τελειώσει. Ἀλλὰ αὐτὴ ἡ τελευταία σχέση ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν $b^2 = 2(ab)^2/(b+c)^2$, δηλαδή, μὲ τὴν $(b+c)^2 = 2a^2$, ποὺ ἰσχύει λόγω τοῦ (2).