Εὐκλείδεια Γεωμετρία

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2010

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

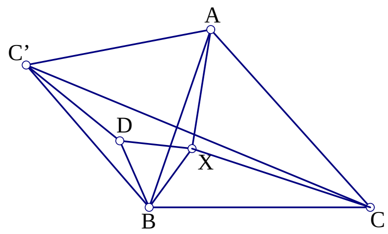
Μάθημα 8

Τετάρτη 13-10-2010

Συνοπτικὴ περιγραφή

Συνεχίσθηκε ἡ μελέτη τῶν ἰδιοτήτων τοῦ σημείου Fermat, ἡ ὁποία εἶχε ἀρχίσει στὸ προηγούμενο (7) μάθημα. Ἀποδείχθηκαν τὰ ἑξῆς λήμματα:

Λῆμμα 1. *Ἔστω τρίγωνο ABC. Μὲ πλευρὰ AB κατασκευάζομε, ἐξωτερικῶς τοῦ τριγώνου, ἰσόπλευρο τρίγωνο ABC'. Τότε, γιὰ κάθε σημεῖο X ἰσχύει ἡ σχέση $XA + XB + XC \geq CC'$.* (βλ. σχῆμα 1.)



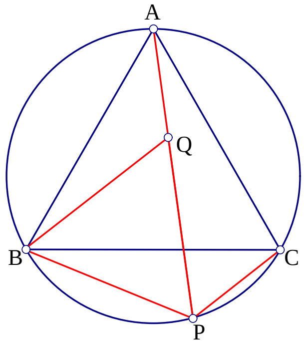
Σχῆμα 1: Λῆμμα 1

Γιὰ τὴν ἀπόδειξη κατασκευάσαμε τὸ βοηθητικὸ ἰσόπλευρο τρίγωνο XBD, ὅπως στὸ σχῆμα καὶ παρατηρήσαμε ὅτι, ἂν στραφεῖ τὸ τρίγωνο $BC'D$ κατὰ 60^o, μὲ κέντρο στροφῆς τὸ B, συμπίπτει μὲ τὸ τρίγωνο BAX, ὁπότε τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα. Ἀλλὰ τότε, $XA = DC'$. Ἐπίσης, $XB = XD$, ἄρα, $XA+XB+XC = C'D+DX+XC \geq C'C$, ποὺ ὁλοκληρώνει τὴν ἀπόδειξη.

Ἀπὸ τὴν τελευταία σχέση τῆς παραπάνω ἀπόδειξης γίνεται σαφὲς ὅτι τὸ $=$ ἰσχύει μόνον ὅταν τὸ X βρίσκεται ἐπὶ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος CC'.

Λῆμμα 2. *Ἔστω ἰσόπλευρο τρίγωνο ABC καὶ ὁ περιγεγραμμένος περὶ αὐτὸ κύκλος. Στὸ τόξο χορδῆς BC καὶ μέτρου 120^o θεωροῦμε τυχαῖο σημεῖο P. Τότε, $PB + PC = PA$.* (βλ. σχῆμα 2.)

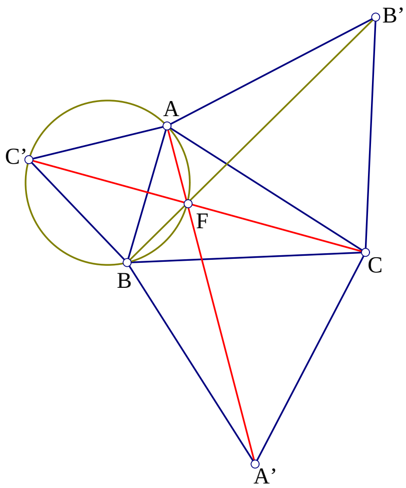
Γιὰ τὴν ἀπόδειξη παρατηρήσαμε, πρῶτα, ὅτι $PA > PB$, διότι, στὸ τρίγωνο PAB ἡ πλευρὰ PA ἔχει ἀπέναντί της μεγαλύτερη γωνία ἀπὸ αὐτὴν ποὺ ἔχει ἀπέναντί της ἡ πλευρὰ PB. Μποροῦμε, λοιπόν, νὰ πάρομε σημεῖο Q ἐπὶ τῆς PA, τέτοιο ὥστε $PQ = PB$. Ὅμως, τώρα, τὸ τρίγωνο PBQ εἶναι ἰσόπλευρο κορυφῆς P καὶ ἡ γωνία $\angle QPB$ τῆς κορυφῆς



Σχῆμα 2: Λῆμμα 2

εἶναι 60^o, ἄρα τὸ $\triangle PQB$ εἶναι ἰσόπλευρο. Μὲ τὴ βοήθεια αὐτῆς τῆς παρατήρησης βλέπομε εὔκολα ὅτι $\triangle BQA = \triangle BPC$ (στροφὴ 60^o μὲ κέντρο τὸ B), ἄρα $QA = PC$, ὁπότε, $PB + PC = PQ + QA = PA$.

Ἂς ἐπιστρέψομε τώρα στὸ σχῆμα 3 τοῦ προηγουμένου (7) μαθήματος. Τὸ τετρά-



Σχῆμα 3: Σημεῖο Fermat τοῦ $\triangle ABC$

πλευρο $FAC'B$ εἶναι ἐγγράψιμο, ἄρα, ἂν φαντασθοῦμε τὸν περιγεγραμμένο περὶ τὸ τετράπλευρο αὐτὸ κύκλο, τὸ Λῆμμα 2 ἐφαρμόζεται καὶ μᾶς δίνει $FA + FB = FC'$. Ἄρα, *ὑπὸ τὴν προϋπόθεση ὅτι τὸ F βρίσκεται μεταξὺ τῶν C καὶ C' ἢ συμπίπτει μὲ τὸ C*[1], $FA+FB+FC = FC'+FC = CC'$. Ἡ προϋπόθεση αὐτὴ ἱκανοποιεῖται, καθὼς μπορεῖ ν' ἀποδείξει κανείς (δὲν εἶναι ἐντελῶς ἁπλό), ἄν, καὶ μόνο ἄν, καὶ οἱ τρεῖς γωνίες τοῦ

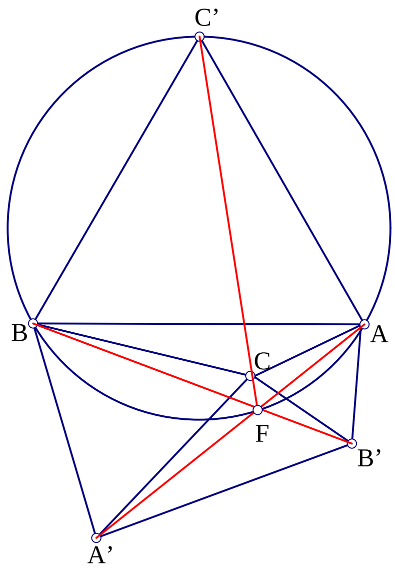
[1] Τὸ F συμπίπτει μὲ τὸ C, ὅταν $\angle C = 120^o$.

τριγώνου εἶναι $\leq 120^{\text{o}}$.
Τώρα, τὸ Λῆμμα 1 μᾶς λέει ὅτι, γιὰ κάθε σημεῖο X ἰσχύει $XA+XB+XC \geq CC'$, ἄρα:

> *Τὸ σημεῖο Fermat F ἑνὸς τριγώνου, τοῦ ὁποίου καμμία γωνία δὲν ὑπερβαίνει τὶς 120^{o}, ἔχει τὴν ἰδιότητα, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὶς κορυφὲς τοῦ τριγώνου νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστο δυνατό.*

Γιὰ τὴν περίπτωση τριγώνου ABC μὲ ὅλες τὶς γωνίες του $\leq 120^{\text{o}}$, δὲν ὑπάρχει σημεῖο $X \neq F$, μὲ $XA+XB+XC$ ἐλάχιστο. Διότι, δείξαμε ὅτι ἕνα τέτοιο X πρέπει νὰ βρίσκεται ἐπὶ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος CC'. Ἀνάλογα, ὅμως, τὸ X πρέπει νὰ βρίσκεται καὶ ἐπὶ τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων BB' καὶ AA' [2], ἄρα, τὸ X θὰ εἶναι τὸ σημεῖο τομῆς τῶν AA', BB', CC', δηλαδή, $X = F$.

Παρατήρηση. (Ἐκτὸς ὕλης.) Ὅταν μία γωνία τοῦ $\triangle ABC$, ἔστω ἡ $\angle C$ εἶναι $> 120^{\text{o}}$, τότε (βλ. σχῆμα 4), κάνοντας χρήση τοῦ παραπάνω Λήμματος 2, βλέπομε ὅτι $FA + FB + FC = FC' + FC = CC' + 2FC$. Ἀφ' ἑτέρου, στὴν περίπτωση αὐτή, τὸ σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου μὲ ἄθροισμα ἀποστάσεων ἀπὸ τὶς κορυφὲς τοῦ τριγώνου ἐλάχιστο, εἶναι το C, καθὼς $CA + CB + CC = CA + CB + 0 = CA + CB < FA + FB =$(Λῆμμα 2) $FC' < CC'$.



Σχῆμα 4: Σημεῖο μὲ ἄθροισμα ἀποστάσεων ἐλάχιστο - Περίπτωση γωνίας $\geq 120^{\text{o}}$

[2]Ἡ κορυφὴ C' δὲν ἔχει κάποια extra ἰδιότητα, ἔναντι τῶν κορυφῶν B καὶ C!