

# Ευκλείδεια Γεωμετρία

Φθινοπωρινό Έξάμηνο 2010

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Α' Έξεταστική Περίοδος

3-2-2011

Έκτος από το όνομα και τον ΑΜ σας, στην κόλλα σας θα γράψετε **όπωςδήποτε** και το γράμμα **Β**. Μαζί με το γραπτό σας **θα παραδώσετε και το φύλλο των ερωτήσεων**.

1. Σε τρίγωνο  $ABC$  φέρουμε τη διάμεσο  $BM$  και έστω  $N$  το μέσο της. Φέρουμε και τη  $AN$ , της οποίας η προέκταση τέμνει την  $BC$  στο  $D$ . Αποδειξτε ότι  $DC = 2 \cdot BD$ .  
Υπόδειξη: Από το  $M$  φέρετε μία παράλληλη προς  $AN$ . μον. 1.5
2. Έστω τρίγωνο  $ABC$ . Σχεδιάστε την ευθεία Euler και τον κύκλο Euler αυτού του τριγώνου και διατυπώστε τα σχετικά θεωρήματα, κάνοντας χρήση **άποκλειστικά** των έξης γραμμάτων για την ονομασία των σημείων του σχήματός σας (έκτος των  $A, B, C$ ):  $D, F, G, K, L, M, S, P, T, X, V, Y$ . μον. 1.5
3. Σε τρίγωνο  $ABC$  θεωρούμε το σημείο  $B'$  επί της πλευράς  $AC$ , για το οποίο  $B'A/B'C = 3$  και το σημείο  $C'$  επί της πλευράς  $AB$ , για το οποίο  $C'A/C'B = 6/7$ . Έστω  $O$  το σημείο τομής των  $CC'$  και  $BB'$  και έστω ότι η ευθεία  $AO$  τέμνει την πλευρά  $BC$  στο  $A'$ . Αν το μήκος του εθύγραμμου τμήματος  $A'C$  είναι 2, ποιο είναι το μήκος του  $A'B$ ; μον. 1
4. Έστω εθύγραμμο τμήμα  $MN$ . Περιγράψτε με ακρίβεια τον γεωμετρικό τόπο των σημείων  $T$  του επιπέδου, για τα οποία ισχύει  $TN/TM = 1/3$ . Περιγράψτε τη γεωμετρική κατασκευή αυτού του γεωμετρικού τόπου. μον. 1
5. Σε τρίγωνο  $KLM$ , τα μήκη των πλευρών του είναι ως έξης:  $KL = 3, KM = 5, LM = 6$ . Ποιο είναι το μήκος της διαμέσου που φέρουμε από την κορυφή  $K$ ; Περιγράψτε τη γεωμετρική κατασκευή αυτού του μήκους, όταν είναι γνωστό το μοναδιαίο μήκος. μον. 1
6. Περιγράψτε την κατασκευή του εθύγραμμου τμήματος  $\sqrt{a^2 - b \cdot c}$ , όπου τα  $a, b, c$  είναι δεδομένα εθύγραμμα τμήματα, τέτοια ώστε  $b \cdot c < a^2$ . μον. 1

(συνέχεια πίσω)

7. Ένα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο  $ABCD$  ἔχει μήκη πλευρῶν  $AB = 4a$ ,  $BC = 5a$  καὶ εἶναι ἐγγεγραμμένο σὲ κύκλο. Ἐστω  $M$  τὸ μέσο τῆς  $CD$ . Φέρομε τὴν  $BM$ , ἢ ὁποία, προεκτεινόμενη, τέμνει τὸν κύκλο στὸ σημεῖο  $P$ . Ὑπολογίστε τὰ μήκη τῶν  $BM$  καὶ  $MP$  συναρτήσει τοῦ  $a$  καὶ ἀποδείξτε ὅτι  $MP = \frac{4}{29}BM$ . μον. 1.5  
 Ὑπόδειξη. Ἡ δύναμη σημείου ὡς πρὸς κύκλο θὰ σᾶς βοηθήσει.
8. Σ' αὐτὴ τὴν ἀσκηση θεωροῦμε ὅτι μᾶς ἔχει δοθεῖ τὸ μοναδιαῖο μῆκος καὶ ἓνα μῆκος  $\ell$ . Περιγράψτε τὴν κατασκευὴ τριγώνου  $ABC$ , τὸ ὁποῖο ἱκανοποιεῖ τὶς ἑξῆς συνθήκες: (1)  $BC = 4$ , (2)  $AB^2 - AC^2 = 12$  καὶ (3) τὸ ὕψος ἀπὸ τὴν κορυφὴ  $A$  ἔχει μῆκος  $\ell$ . μον. 1.5
9. Ἐστω κύκλος  $C$  καὶ σημεῖο  $A$  στὸ ἐξωτερικὸ του. Ἀπὸ τὸ  $A$  φέρομε δύο εὐθεῖες, ποὺ τέμνουν τὸν  $C$ , ἡ πρώτη στὰ σημεῖα  $B$  καὶ  $C$  (τὸ  $B$  μεταξὺ τῶν  $A, C$ ) καὶ ἡ δευτέρη στὰ σημεῖα  $D$  καὶ  $E$  (τὸ  $D$  μεταξὺ τῶν  $A, E$ ). Τέλος, φέρομε τὴ διχοτόμο τῆς γωνίας  $\angle CAE$ , ἢ ὁποία τέμνει τὶς χορδὲς  $BD$  καὶ  $CE$  στὰ σημεῖα  $F$  καὶ  $G$ , ἀντιστοίχως. Ἀποδείξτε ὅτι  $FB/FD = GE/GC$ . μον. 1.5

Σύνολο μονάδων 11.5. Ἄριστα: 10 μονάδες. Βάση: 5 μονάδες.

Καλὴ Ἐπιτυχία!