

Εὐκλείδεια Γεωμετρία

Φθινοπωρινὸ Ἐξάμηνο 2010

Καθηγητῆς Ν.Γ. Τζανάκης

Β' Ἐξεταστικὴ Περίοδος

2-9-2011

Ἐκτός ἀπὸ τὸ ὄνομα καὶ τὸν ἈΜ σας, στὴν κόλλα σας θὰ γράψετε **ὅπωςδῆποτε** καὶ τὸ γράμμα **Α**. Μαζὶ μὲ τὸ γραπτό σας **θὰ παραδώσετε καὶ τὸ φύλλο τῶν ἐρωτήσεων**.

- Ἐστω ὅτι τὰ μόνον δεδομένα σας εἶναι δύο εὐθύγραμμα τμήματα α καὶ β , μὲ ἀντίστοιχα μήκη $\sqrt{6}$ καὶ $\sqrt{3}$. Περιγράψτε μὲ ἓνα ἢ περισσότερα *καλοφτιαγμένα* σχήματα, συνοδευόμενα ἀπὸ σύντομα σχόλια, τὴν κατασκευὴ μὲ κανόνα καὶ διαβήτη εὐθυγράμμων τμημάτων μὲ μήκη 1 καὶ $\sqrt{2}$, ἀντιστοίχως.
- Ἐστω ἰσοσκελὲς τρίγωνο ABC κορυφῆς A καὶ σημεῖο X τῆς βάσης BC (μεταξὺ B καὶ C). Ἄν B' καὶ C' εἶναι οἱ προβολές τοῦ X στὶς εὐθεῖες AB καὶ AC , ἀντιστοίχως, ἀποδείξτε ὅτι τὸ ἄθροισμα $XB' + XC'$ ἰσοῦται μ' ἓνα σταθερὸ μέγεθος τοῦ τριγώνου, ὅποιαδῆποτε κι ἂν εἶναι ἡ θέση τοῦ X (ἐπὶ τῆς βάσεως BC).
- Δίδεται κύκλος κέντρου O καὶ ἀκτίνας R καὶ σημεῖο S ὄχι ἐπὶ τῆς περιφέρειας. Ἐπὶ τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου κινεῖται σημεῖο A . Σὲ κάθε θέση του θεωροῦμε σημεῖο T ἐπὶ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος SA , τέτοιο ὥστε $ST = \frac{1}{3} \cdot SA$. Ποιὸς εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου T ;
Ἐπίδειξη. Γιὰ νὰ εἶναι πλήρης ἡ λύση σας ἀπαιτεῖται νὰ κάνετε καὶ τὸ ἀντίστροφο.
Ἐπὶ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος SO θεωρήστε σημεῖο K , τὸ ὁποῖο νὰ χωρίζει τὸ SO σὲ κατάλληλο λόγο καὶ ὑπολογίστε τὸ KT κάνοντας χρῆση τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλῆ.
- Ἐστω τρίγωνο ABC , ἀμβλυγώνιο στὴν κορυφὴ B . Ἐστω D ἡ προβολὴ τοῦ A στὴν εὐθεῖα BC , F ἡ προβολὴ τοῦ C στὴν εὐθεῖα AB καὶ H ἡ τομὴ τῶν εὐθειῶν AD καὶ CF . Ἀποδείξτε τὰ ἑξῆς:
(α) Ἡ εὐθεῖα HB εἶναι κάθετη στὴν AC . (β) Ἄν E εἶναι ἡ τομὴ τῶν HB καὶ AC , τότε ἡ BE διχοτομεῖ τὴ γωνία $\angle DEF$.
Ἐπίδειξη. Γιὰ τὸ (β) θὰ διακρίνετε στὸ σχῆμα σας κάποια ἐγγράφημα τετράπλευρα καὶ θὰ κάνετε χρῆση ἰδιοτήτων τέτοιων τετραπλευρῶν.
- Δώσετε τὸν ὅρισμό τοῦ ριζικοῦ ἄξονα δύο κύκλων.
Οἱ σχετικὲς θέσεις τριῶν κύκλων C_1, C_2, C_3 , τῶν ὁποίων τὰ κέντρα δὲν εἶναι συνευθειακά, εἶναι ὡς ἑξῆς: Ὁ C_1 εἶναι στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ C_2 καὶ ἐφάπτεται μὲ αὐτόν· C_2 ἐφάπτεται ἐξωτερικὰ μὲ τὸν C_3 · οἱ C_1, C_3 βρίσκονται ὁ ἓνας ἔξω ἀπὸ τὸν ἄλλο. Ἀποδείξτε ὅτι ὁ ριζικὸς ἄξονας τῶν C_1, C_3 , ἢ κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν C_2, C_3 καὶ ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν C_1, C_2 διέρχονται ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο.
Ἐπίδειξη. Θυμηθῆτε ποιὸς εἶναι ὁ ριζικὸς ἄξονας δύο κύκλων σὲ μιὰ πολὺ σημαντικὴ εἰδικὴ περίπτωσι σχετικῆς θέσεως τῶν κύκλων.

Κάθε θέμα βαθμολογεῖται μὲ 2 μονάδες. Ἄριστα: 10 μονάδες. Βάση: 5 μονάδες.

Καλὴ Ἐπιτυχία!