

Ευκλείδεια Γεωμετρία

Φθινοπωρινό Έξάμηνο 2010

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

Β' Έξεταστική Περίοδος

2-9-2011

Έκτος από το όνομα και τον ΑΜ σας, στην κόλλα σας θα γράψετε **όποσδήποτε** και το γράμμα **Β**. Μαζί με το γραπτό σας **θα παραδώσετε και το φύλλο των ερωτήσεων**.

- Έστω ότι το μόνο δεδομένο σας είναι ευθύγραμμο τμήμα α μήκους $\sqrt{2}$. Περιγράψτε με ένα ή περισσότερα *καλοφτιαγμένα* σχήματα, συνοδευόμενα από σύντομα σχόλια, την κατασκευή με κανόνα και διαβήτη ευθυγράμμων τμημάτων με μήκη 1 και $\sqrt[4]{10}$, αντίστοιχως.
- Έστω ισοσκελές τρίγωνο ABC κορυφής A και σημείο D της βάσης BC (μεταξύ B και C). Αν E και F είναι οι προβολές του D στις ευθείες AB και AC , αντίστοιχως, αποδείξτε ότι το άθροισμα $DE + DF$ ισούται μ' ένα σταθερό μέγεθος του τριγώνου, όποιαδήποτε κι αν είναι η θέση του D (επί της βάσεως BC).
- Δίδεται κύκλος κέντρου K και ακτίνας r και σημείο T όχι επί της περιφέρειας. Επί της περιφέρειας του κύκλου κινείται σημείο A . Σε κάθε θέση του θεωρούμε σημείο M επί της προεκτάσεως του ευθυγράμμου τμήματος TA , πρὸς τὸ μέρος τοῦ A , τέτοιο ὥστε $AM = AT$. Ποιὸς εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου M ;
Υπόδειξη. Για να είναι πλήρης ἡ λύση σας ἀπαιτεῖται νὰ κάνετε καὶ τὸ ἀντίστροφο.
Επί της προεκτάσεως τοῦ ευθυγράμμου τμήματος TK , πρὸς τὸ μέρος τοῦ K , θεωρήστε κατάλληλο σημείο O καὶ υπολογίστε τὸ OM κάνοντας χρῆση τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλή.
- Έστω τρίγωνο ABC , ἀμβλυγώνιο στὴν κορυφή C . Έστω B' ἡ προβολὴ τοῦ B στὴν ευθεία AC , C' ἡ προβολὴ τοῦ C στὴν ευθεία AB καὶ T ἡ τομὴ τῶν ευθειῶν BB' καὶ CC' . Αποδείξτε τὰ ἑξῆς: (α) Ἡ ευθεία AT εἶναι κάθετη στὴν BC . (β) Ἄν A' εἶναι ἡ τομὴ τῶν AT καὶ BC , τότε ἡ $A'B$ διχοτομεῖ τὴ γωνία $\angle B'A'C'$.
Υπόδειξη. Για τὸ (β) θὰ διακρίνετε στὸ σχῆμα σας κάποια ἐγγράφιμα τετράπλευρα καὶ θὰ κάνετε χρῆση ἰδιοτήτων τέτοιων τετραπλεύρων.
- Δώσετε τὸν ὄρισμό τοῦ ριζικοῦ ἄξονα δύο κύκλων.
Οἱ σχετικὲς θέσεις τριῶν κύκλων C_1, C_2, C_3 , τῶν ὁποίων τὰ κέντρα δὲν εἶναι συνευθειακά, εἶναι ὡς ἑξῆς: Ὁ C_2 ἐφάπτεται ἐξωτερικὰ μὲ τὸν C_1 καὶ μὲ τὸν C_3 , ἐνῶ οἱ C_1, C_3 τέμνονται. Αποδείξτε ὅτι ἡ κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν C_1, C_2 , ἡ κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν C_2, C_3 καὶ ἡ κοινὴ χορδὴ τῶν C_1, C_3 διέρχονται ἀπὸ τὸ ἴδιο σημείο.
Υπόδειξη. Θυμηθῆτε ποιὸς εἶναι ὁ ριζικὸς ἄξονας δύο κύκλων σὲ δύο πολὺ σημαντικὲς εἰδικὲς περιπτώσεις σχετικῆς θέσης τῶν κύκλων.

Κάθε θέμα βαθμολογείται μὲ 2 μονάδες. Ἄριστα: 10 μονάδες. Βάση: 5 μονάδες.

Καλὴ Ἐπιτυχία!