

# Ευκλείδεια Γεωμετρία

Φθινοπωρινό Έξάμηνο 2010

Καθηγητής Ν.Γ. Τζανάκης

## Β' Έξεταστική Περίοδος

2-9-2011

Έκτός από το όνομα και τον ΑΜ σας, στην κόλλα σας θα γράψετε **όποσδήποτε** και το γράμμα **Γ**. Μαζί με το γραπτό σας **θα παραδώσετε και το φύλλο των ερωτήσεων**.

1. Έστω ότι τα μόνα δεδομένα σας είναι δύο εϋθύγραμμα τμήματα  $\alpha$  και  $\beta$ , με αντίστοιχα μήκη  $\sqrt{2}$  και  $\sqrt{7}$ . Περιγράψτε με ένα ή περισσότερα *καλοφτιαγμένα* σχήματα, συνοδευόμενα από σύντομα σχόλια, την κατασκευή με κανόνα και διαβήτη εϋθυγράμμων τμημάτων με μήκη 1 και  $\sqrt[4]{3}$ , αντίστοιχως.
2. Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $ABC$  κορυφής  $A$  και σημείο  $D$  στην προέκταση του  $BC$ , προς το μέρος του  $C$ . Αν  $E$  και  $F$  είναι οι προβολές του  $D$  στις ευθείες  $AC$  και  $AB$ , αντίστοιχως, αποδείξτε ότι η διαφορά  $DF - DE$  ισοϋται μ' ένα σταθερό μέγεθος του τριγώνου, οποιαδήποτε κι αν είναι η θέση του  $D$  (στην προέκταση του  $BC$ , προς το μέρος του  $C$ ).
3. Δίδεται κύκλος κέντρου  $K$  και ακτίνας  $\rho$  και σημείο  $S$  όχι επί της περιφέρειας. Επί της περιφέρειας του κύκλου κινείται σημείο  $M$ . Σε κάθε θέση του θεωρούμε σημείο  $P$  επί του εϋθυγράμμου τμήματος  $SM$ , τέτοιο ώστε  $SM = 4 \cdot SP$ . Ποιός είναι ο γεωμετρικός τόπος του σημείου  $P$ ;  
Υπόδειξη. Για να είναι πλήρης ή λύση σας απαιτείται να κάνετε και το αντίστροφο.  
Επί του εϋθυγράμμου τμήματος  $SK$  θεωρήστε σημείο  $T$ , το οποίο να χωρίζει το  $SK$  σε κατάλληλο λόγο και υπολογίστε το  $TP$  κάνοντας χρήση του θεωρήματος του Θαλή.
4. Έστω τρίγωνο  $ABC$ , αμβλυγώνιο στην κορυφή  $A$ . Έστω  $P$  ή προβολή του  $A$  στην ευθεία  $BC$ ,  $Q$  ή προβολή του  $B$  στην ευθεία  $AC$  και  $I$  ή τομή των ευθειών  $AP$  και  $BQ$ . Αποδείξτε τα εξής:  
(α) Η ευθεία  $AB$  είναι κάθετη στην  $IC$ . (β) Αν  $R$  είναι η τομή των  $AB$  και  $IC$ , τότε η  $RA$  διχοτομεί τη γωνία  $\angle PRQ$ .  
Υπόδειξη. Για το (β) θα διακρίνετε στο σχήμα σας κάποια εγγράψιμα τετράπλευρα και θα κάνετε χρήση ιδιοτήτων τέτοιων τετραπλεύρων.
5. Δώσετε τον όρισμό του ριζικού άξονα δύο κύκλων.  
Οι σχετικές θέσεις τριών κύκλων  $C_1, C_2, C_3$ , των οποίων τα κέντρα δέν είναι συνευθειακά, είναι ως εξής: Ο  $C_3$  εφάπτεται εξωτερικά με τον  $C_1$  και με τον  $C_2$ , ενώ οι  $C_1, C_2$  βρίσκονται ο ένας έξω από τον άλλο. Αποδείξτε ότι ο ριζικός άξονας των  $C_1, C_2$ , ή κοινή *έσωτερική* εφαπτομένη των  $C_1, C_3$  και ή κοινή *έσωτερική* εφαπτομένη των  $C_2, C_3$  διέρχονται από το ίδιο σημείο.  
Υπόδειξη. Θυμηθήτε ποιός είναι ο ριζικός άξονας δύο κύκλων σε μία πολύ σημαντική ειδική περίπτωση σχετικής θέσης των κύκλων.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 2 μονάδες. Άριστα : 10 μονάδες. Βάση : 5 μονάδες.

Καλή Έπιτυχία!