Εὐκλείδεια Γεωμετρία

Φθινοπωρινὸ Ἑξάμηνο 2010

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Β′ Ἐξεταστικὴ Περίοδος
2-9-2011

> Ἐκτὸς ἀπὸ τὸ ὄνομα καὶ τὸν ΑΜ σας, στὴν κόλλα σας θὰ γράψετε **ὁπωσδήποτε** καὶ τὸ γράμμα **Δ**. Μαζὶ μὲ τὸ γραπτό σας **θὰ παραδώσετε καὶ τὸ φύλλο τῶν ἐρωτήσεων**.

1. Ἔστω ὅτι τὰ μόνα δεδομένα σας εἶναι δύο εὐθύγραμμα τμήματα α καὶ β, μὲ ἀντίστοιχα μήκη $\sqrt{5}$ καὶ $\sqrt{11}$. Περιγράψτε μὲ ἕνα ἢ περισσότερα *καλοφτιαγμένα* σχήματα, συνοδευόμενα ἀπὸ σύντομα σχόλια, τὴν κατασκευὴ μὲ κανόνα καὶ διαβήτη εὐθυγράμμων τμημάτων μὲ μήκη 1 καὶ $\sqrt[4]{6}$, ἀντιστοίχως.

2. Ἔστω ἰσοσκελὲς τρίγωνο ABC κορυφῆς A καὶ σημεῖο X στὴν προέκταση τοῦ BC, πρὸς τὸ μέρος τοῦ B. Ἂν B' καὶ C' εἶναι οἱ προβολὲς τοῦ X στὶς εὐθεῖες AB καὶ AC, ἀντιστοίχως, ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ διαφορὰ $XC' - XB'$ ἰσοῦται μ' ἕνα σταθερὸ μέγεθος τοῦ τριγώνου, ὁποιαδήποτε κι ἂν εἶναι ἡ θέση τοῦ X (στὴν προέκταση του BC, πρὸς τὸ μέρος τοῦ C).

3. Δίδεται κύκλος κέντρου K καὶ ἀκτίνας R καὶ σημεῖο T ὄχι ἐπὶ τῆς περιφέρειας. Ἐπὶ τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου κινεῖται σημεῖο A. Σὲ κάθε θέση του θεωροῦμε σημεῖο S ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AT, πρὸς τὸ μέρος τοῦ T, τέτοιο ὥστε $ST = \frac{1}{2}AT$. Ποιὸς εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου S;

   Ὑπόδειξη. Γιὰ νὰ εἶναι πλήρης ἡ λύση σας ἀπαιτεῖται νὰ κάνετε καὶ τὸ ἀντίστροφο.

   Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος KT, πρὸς τὸ μέρος τοῦ T, θεωρῆστε κατάλληλο σημεῖο O καὶ ὑπολογῖστε τὸ OS κάνοντας χρήση τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλῆ.

4. Ἔστω τρίγωνο XYZ, ἀμβλυγώνιο στὴν κορυφὴ X. Ἔστω B ἡ προβολὴ τοῦ Y στὴν εὐθεία XZ, C ἡ προβολὴ τοῦ Z στὴν εὐθεία XY καὶ H ἡ τομὴ τῶν εὐθειῶν BY καὶ CZ. Ἀποδεῖξτε τὰ ἑξῆς: (α′) Ἡ εὐθεία HX εἶναι κάθετη στὴν YZ. (β′) Ἂν A εἶναι ἡ τομὴ τῶν HX καὶ YZ, τότε ἡ AX διχοτομεῖ τὴ γωνία $\angle BAC$.

   Ὑπόδειξη. Γιὰ τὸ (β′) θὰ διακρίνετε στὸ σχῆμα σας κάποια ἐγγράψιμα τετράπλευρα καὶ θὰ κάνετε χρήση ἰδιοτήτων τέτοιων τετραπλεύρων.

5. Δώσετε τὸν ὁρισμὸ τοῦ ριζικοῦ ἄξονα δύο κύκλων.
   Οἱ σχετικὲς θέσεις τριῶν κύκλων C_1, C_2, C_3, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα δὲν εἶναι συνευθειακά, εἶναι ὡς ἑξῆς: Οἱ C_1, C_2 εἶναι μέσα στὸν C_3 καὶ ἐφάπτονται (ἐσωτερικὰ) μὲ αὐτόν, ἐνῶ μεταξύ τους (οἱ C_1, C_2) τέμνονται. Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν C_1, C_3, ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν C_2, C_3 καὶ ἡ κοινὴ χορδὴ τῶν C_1, C_2 διέρχονται ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο.

   Ὑπόδειξη. Θυμηθῆτε ποιὸς εἶναι ὁ ριζικὸς ἄξονας δύο κύκλων σὲ δύο πολὺ σημαντικὲς εἰδικὲς περιπτώσεις σχετικῆς θέσης τῶν κύκλων.

Κάθε θέμα βαθμολογεῖται μὲ 2 μονάδες. Ἄριστα: 10 μονάδες. Βάση: 5 μονάδες.

Καλὴ Ἐπιτυχία!